論　説

実社会における数理計画法の適用

横　山　雅　夫

1．はじめに

数理計画法は応用数学の研究課題の一分野とも考えられるが、各種の実際問題に対する応用の実績がある[1],[2]。特に線形計画法は、数理計画法の中では歴史が古く、汎用的でかつ完成度の高い手法であるために、多くの問題に適用されてきた。そこで本論文では線形計画法のみに限定してその応用の実態を明らかにする。

初めに、やや複雑な線形計画問題の例題を用いてその定式化のしかたを示す。次に、著者が企業において実際に線形計画法を適用している状況を調査した結果に基づいてその現状を明らかにする。最後に、企業において線形計画法を適用するときの一般的な留意事項として定式化の際導入する前提条件の妥当性について検討する。

2．複雑な問題の定式化

簡単な線形計画問題の例題では実際問題との関連を明確にしにくいため、やや複雑な問題の定式化の例を示そう[3],[4]。これらの例題は次章の適用例と密接な関連があるものである。

2．1　石油混合問題

m種類の原料油 P_1，P_2，・・・，P_m を適当な割合で混合することによって、

n 種類の石油製品 Q_1, Q_2,・・・, Q_n を作るものとする。

(1)　各原料油 P_1, P_2,・・・, P_m に含まれるいおう分、各原料油の使用可能量、その仕入価格は原料油によって異なっていて、これらの値を以下のような記号で表すものとする。

S_i：原料油 P_i のいおう含有率［重量%］($i=1$,・・・, m)

A_i：原料油 P_i の使用可能量［t］($i=1$,・・・, m)

C_i：原料油 P_i の仕入価格［円／t］($i=1$,・・・, m)

なお、石油の計量単位としてここでは通常用いられる［kℓ］でなく簡単のため［t］を用いている（以下同様）。

(2)　各石油製品 Q_1, Q_2,・・・, Q_n には含まれるいおう分に関する規格（重量%）が設けられており、また、これだけは作らねばならないという必要生産量が定められているものとし、これらの値を以下のような記号で表すものとする。

U_j：石油製品 Q_j に含まれるいおう分に関する上限の規格［重量%］
($j=1$,・・・, n)

B_j：石油製品 Q_j の必要生産量［t］($j=1$,・・・, n)

このとき、石油製品の規格に対する制約を守り、かつ指定された石油製品の生産量を満たすという条件のもとに原料油購入費用の合計が最小になるように原料を購入して混合し、石油製品を作るにはどうしたらいいかという問題について検討し、定式化してみよう。ここで、問題の変数を以下のように定義しよう。

w_i：原料油 P_i の購入量［t］($i=1$,・・・, m)

x_{ij}：購入した原料油 P_i のうち石油製品 Q_j の生産のために用いる量［t］
($i=1$,・・・, m; $j=1$,・・・, n)

y_j：石油製品 Q_j の生産量［t］($j=1$,・・・, n)

この時、問題の目的関数と制約式は以下のように設定できる。

［目的関数］

目的関数は、原料油の購入費用の和であり、次のように表される（目的関数最小化）。

$$z=\sum_{i=1}^{m} C_i \ w_i \qquad (1)$$

［制約式］

①製品 Q_j の硫黄分の割合が、U_j ［%］以下でなければならないので、次の式が成り立たなければならない。

$$\left(\sum_{i=1}^{m} 0.01 S_i \ x_{ij}\right) / \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) \leqq 0.01 U_j, \quad j=1, \cdot\cdot\cdot, \ n$$

これを整理すると、

$$\sum_{i=1}^{m} (S_i - U_j) \ x_{ij} \leqq 0, \quad j=1, \cdot\cdot\cdot, \ n \qquad (2)$$

②各原料油の使用可能量の制約式は以下のように表される。

$$w_i \leqq A_i, \quad i=1, \cdot\cdot\cdot, \ m \qquad (3)$$

③各石油製品の必要生産量の制約式は以下のように表される。

$$y_j \geqq B_j, \quad j=1, \cdot\cdot\cdot, \ n \qquad (4)$$

④変数 w_i, x_{ij}, y_j の間には、以下のような平衡を表す等式が成り立たなければならない。

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = w_i, \quad i=1, \cdot\cdot\cdot, \ m \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = y_j, \quad j=1, \cdot\cdot\cdot, \ n \qquad (6)$$

⑤変数に関する非負条件

$$\left.\begin{array}{l} w_i \geqq 0, \quad i=1, \cdot\cdot\cdot, \ m \\ x_{ij} \geqq 0, \quad i=1, \cdot\cdot\cdot, \ m; \ j=1, \cdot\cdot\cdot, \ n \\ y_j \geqq 0, \quad j=1, \cdot\cdot\cdot, \ n \end{array}\right\} \qquad (7)$$

こうして問題は制約式(2)～(7)のもとで目的関数(1)を最小にせよという線形計画問題として定式化できた。

原料油の種類$m=3$、石油製品の種類$n=2$の場合のモデルに対して、シンプレクス表と同様、係数だけを取り出して示すと**表 1** のように表される（係数として記号をそのまま用いている）。表中空白部分は０の記入を省略したものである。

表1　石油混合問題のモデル

変数				w_1	w_2	w_3	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_{32}	y_1	y_2
仕入価格				C_1	C_2	C_3								
イオウ分規格	Q_1	0	$\geqq$				S_1-U_1		S_2-U_1		S_3-U_1			
	Q_2	0	$\geqq$					S_1-U_2		S_2-U_2		S_3-U_2		
原料油使用可能量	P_1	A_1	$\geqq$	1										
	P_2	A_2	$\geqq$		1									
	P_3	A_3	$\geqq$			1								
必要生産量	Q_1	B_1	$\leqq$										1	
	Q_2	B_2	$\leqq$											1
平衡式		0	$=$	1			1	1						
		0	$=$		1				1	1				
		0	$=$			1					1	1		
		0	$=$				1		1		1		1	
		0	$=$					1		1		1		1

2．2　生産・在庫計画

ある商品を生産する工場がある。商品の需要は時間的に変動するが確定的な値として未来のある時点までの需要量が既知であるものとする。一方、工場の生産能力には上限があるために、需要量が小さい時期に商品を在庫品として作りだめしておき、需要量が多い時期に備えることも可能であるものとする。また、残業時間帯で生産を行なうと定時の範囲で生産を行なうよりも生産費用が割り増しになるものとする。さらに商品を在庫として保持していると、保持している時間に比例した費用（在庫保管費用）がかかるものとする。このとき、需要を満たし、生産費用と在庫保管費用の総和を最小にするにはどのような生産計画を立てればいいかという問題を考えよう。

まず、問題の対象になる時間の範囲すなわち計画期間 (planning horizon) を定めることができ、これが長さが等しい小さなT個の期 (period) から成るものとする。また、問題を定式化するために以下のような変数と記号を導入する。

x_t：第 t 期において定時の勤務時間に生産する量［t］

y_t：第 t 期において残業時間に生産する量［t］

I_t：第 t 期の期末の在庫量［t］

d_t：第 t 期の需要量［t］

I_0：第1期の期首の在庫量［t］

a_t：第 t 期において定時の勤務時間に生産するときの単位生産費用［円／t］

b_t：第 t 期において残業時間に生産するときの単位生産費用［円／t］

c_t：第 t 期単位在庫保管費用［円／t］

U_t：第 t 期において定時の勤務時間に生産できる量の上限［t］

V_t：第 t 期において残業時間に生産できる量の上限［t］

H_t：第 t 期の期末の在庫量に対する上限［t］

ここで計画期間の初めすなわち第1期の期首在庫量は0であるとは限らない場合を考え、これを I_0（既知の定数）としている。また第 t 期の在庫保管費用がその期末在庫量 I_t と第 t 期単位在庫保管費用の積 $c_t I_t$ で表されるものとし、全体の在庫保管費用はすべての期に対するこのような在庫保管費用の和で計算できるものとする。

さて、第 t 期末の在庫量 I_t は（$t-1$）期末の在庫量 I_{t-1} に第 t 期の生産量（$x_t + y_t$）を加え、これから第 t 期の需要量 d_t を引いたものに等しくなければならないから、すべての期 $t = 1, \cdot \cdot \cdot, T$ に対して、以下のような等式が成立しなければならない。

$$I_t = I_{t-1} + x_t + y_t - d_t$$

これは

$$x_t + y_t + I_{t-1} - I_t = d_t$$

と変形できる。

そして、問題は以下のように定式化できる。

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{T} (a_t x_t + b_t y_t + c_t I_t) \tag{8}$$

制約式

$$\begin{cases} x_t + y_t + I_{t-1} - I_t = d_t, & t = 1, \cdot \cdot \cdot, T & (9) \\ I_t \leqq H_t, & t = 1, \cdot \cdot \cdot, T & (10) \\ x_t \leqq U_t, & t = 1, \cdot \cdot \cdot, T & (11) \\ y_t \leqq V_t, & t = 1, \cdot \cdot \cdot, T & (12) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} I_t \geqq 0, & t=1,\cdot\cdot\cdot\cdot, T \\ x_t \geqq 0, & t=1,\cdot\cdot\cdot\cdot, T \\ y_t \geqq 0, & t=1,\cdot\cdot\cdot\cdot, T \end{array}\right\} \quad (13)$$

期の数$T=3$に対する本問題のモデルを**表2**に示す（係数として記号をそのまま用いている）。

表2　生産・在庫計画のモデル

生産・在庫量			x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	I_1	I_2	I_3
単位生産・在庫費用			a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
需要量	d_1-I_0	=	1			1			−1		
	d_2	=		1			1		1	−1	
	d_3	=			1			1		1	−1
生産可能量	U_1	≧	1								
	U_2	≧		1							
	U_3	≧			1						
	V_1	≧				1					
	V_2	≧					1				
	V_3	≧						1			
在庫量上限	H_1	≧							1		
	H_2	≧								1	
	H_3	≧									1

なお、この種の問題は変数の設定に工夫をすることによって輸送問題と同じ形式の問題として定式化できることが知られている。

3．企業における線形計画法適用の状況

第一次産業として畜産業における応用、第二次産業として、石油精製業、および清涼飲料業、第三次産業として金融・証券業を取り上げた。具体的には、畜産業として広島県東広島市にある広島大学付属農場における適用を中心に調べた。また石油精製業として岡山県倉敷市にある三菱石油㈱水島製油所におけ

る適用について、清涼飲料業として神奈川県海老名市にある富士コカ・コーラボトリング㈱における適用について調べた。金融・証券業としては、東京の三菱銀行本店および㈱ＭＴＢインベストメントテクノロジー研究所における適用について調べた。

3．1　畜産業における適用

日本の畜産業では、牛肉の自由化以来、良質の牛肉を安く生産することが大きな課題となっている。日本は資源が少ないため、技術力でこれに対抗していくしかないといえる。その場合、遺伝的に優秀な牛そのものを開発することがまず大切である。しかし、それらの牛を健康的にしかも安い経費で飼育することも、また大切なことである。

経費のなかで飼料代は65％程度にも達し、主要な項目となっている。そのため、どのような飼料をどう配合して牛に与えれば最適かという飼料配合の問題が改めて取り上げられてきている。厳密には、個々の牛の必要栄養量に基づいて適当な餌を与えることが必要であるといえる。

さて、中国地方は全国でも有数の肉牛の産地となっていて、広島県東広島市の広島大学付属農場では約110頭の牛が研究用に飼育されている。ここでも飼料配合の問題が研究されている。飼料配合問題とは、家畜の必要な栄養素の基準量と各種飼料の含有栄養素量および価格などのデータを用いて、栄養基準量などの制約を満たし、かつ飼料代などの何らかの目的関数を最適にする飼料の配合量を求める問題である。

飼料としては、通常、とうもろこし、大麦、綿実、大豆かす、米ぬか、ふすま、グルテンフィード、ビートパルプ、みかん皮、大豆皮、ヘイキューブ、食塩、炭酸カルシウム等、14から20数種類の飼料を混合して牛に与えている。ここで、栄養素基準量として100kgの飼料における蛋白質が10kg、カロリーが318 Mcal、粗繊維が８kg含まれている必要があるというような含有量の制約と、各

飼料の含有栄養素量と価格のデータが与えられているときに、どの飼料をどれだけ配合すれば制約を満たすことができるかを考えてみよう。

例えば、とうもろこしは100kg中の蛋白質、カロリー、粗繊維含有量は、それぞれ6.9kg、351Mcal、2.1kgである。この飼料単独では、カロリーは十分であるが、蛋白質も粗繊維も不足している。一方、ヘイキューブは100kg中の蛋白質、カロリー、粗繊維含有量は、それぞれ13.7kg、232Mcal、22.3kgで、蛋白質と粗繊維は十分であるがカロリーが不足している。これから見ても各種の飼料をうまく混合して用いる必要があることがわかる。実は、従来、このようにまちまちの特徴を持つ飼料の適正な配合を試行錯誤で行なうことが試みられてきたが、それは容易ではなく、色々と試算している間に疲れてしまい、目的を達成できないことが多かったのである。

そのために有効な手法として線形計画法が用いられている。この場合の目的関数は色々考えられる。飼料代を目的関数とすることが多いが、飼料代を制約として特定の栄養素（例えば粗繊維の量）を目的関数にすることも考えられる。また、嗜好性が悪いものだと家畜が食べないということがあるので、結果を見て再計算を行なうか、初めから嗜好性を考慮した制約式を入れておくなどの工夫が必要になる。例えば、栄養素の制約以外に、牛の好み等を反映するために、大麦は８kg以上混合して使うなどの特別な制約の設定が必要なことが多い。

なお、広島大学付属農場では、研究が目的であるため、さらに個々の牛の年令や体格に合わせて個別の飼料配合、給餌管理を行なっている。

さて、線形計画法は研究用農場の牛の飼料配合だけではなく、福山市にある日本畜産㈱など一般の畜産会社や飼料会社、養鶏組合などにおける飼料配合計算にも実際に用いられている。鶏の飼料については、肉用のブロイラーになっていくもの、あるいは卵を産む鶏、その中でもまだ若い鶏、いま卵を産んでいるピーク時の鶏、それぞれ栄養の要求量が異なっているので、これを考慮して計算する必要がある。また、養鶏農家でも飼料の自家配合をすることがあり、その時は自分で線形計画法を用いて配合計算をしているところもある。

3．2　石油精製業における適用

石油産業では原油の購入から始まり、蒸留、脱硫、改質、混合などの生産・操業の計画をはじめ設備投資の問題、製品の販売、輸送など多岐にわたる企業活動の意思決定問題において数理計画法の応用がなされている。ここでは石油精製業における数理計画法の応用のうちで、石油製品の生産計画に対する線形計画法の適用例を取り上げる。

石油精製工程は大きく分けて２つの部分から成り立っている。すなわち、石油の精製過程、および石油の混合過程である。原油を受け入れた後、それらの原油は石油精製工程によって蒸留、分解、脱硫、改質の工程を経て半製品として半製品タンクに貯えられる。それらの半製品はブレンダー（混合装置）によって混合され、目的の製品となって製品タンクに貯えられる。そして最後に、それらの製品が全国に輸送されるという流れになる。

三菱石油水島製油所では石油精製装置が35基、半製品タンクと製品タンクあわせて330基のタンクが設置されている。製品数が30品目、半製品数が40品目と数が多く、期末必要在庫量、製品性状、半製品混合比率等に対する制約数が多いことのために、生産計画の問題は規模のきわめて大きい問題となる。このため線形計画法の適用が必要となっている。

線形計画法適用時の入力データとしては以下のようなものがある。

(1)　半製品について

①期首在庫量、性状、

②装置からの生産量、性状

③出入荷量、性状

(2)　製品について

期首在庫量、出入荷量

制約条件としては以下のようなものがある。

①製品・半製品の期末必要在庫量に関する制約

②製品要求性状に関する制約
③半製品混合比率に関する制約
　計算結果の出力としては以下のようなものがある。
①製品混合量
②半製品使用量
③装置稼働量
　目的関数は、利益最大化を考慮して設定される。
　ここで扱われている生産計画問題の大きさは、制約式の数が約400個、変数の数が約800個の規模の線形計画問題である。（なお、これとは別の問題ではもっと大きい規模の問題も扱われている。）

３．３　清涼飲料業における応用

　日本コカ・コーラ㈱および同グループ会社では、製品の製造と輸送の計画に線形計画法を適用している。製品としてはコーラ、ジュース、コーヒーなど多くのものが作られているが、ビンの種類をも考えると、品目数は約100種類にもなる。いくつかの工場で作られた製品はいくつかの営業所に運ばれ、それからルート・カーというやや小型のトラックで、自動販売機のある販売店に運ばれていく。会社では、どの工場でどの種類の製品をいつ作って、どの営業所に運ぶかという生産と輸送の計画に線形計画法を用いているのである。
　さて、実際に調査した富士コカ・コーラボトリング㈱では、神奈川、静岡、山梨の地区の約60,000軒の販売店を３つの工場と35の営業所でカバーしている。品種が100種類程度と多くあり、工場、営業所も多いうえ、清涼飲料は季節商品であり、在庫を考慮した作りだめまで考えなければならないため、生産・輸送計画は複雑な問題となっている。すなわち、製造のしかた、輸送のしかたによって、生産費用、輸送費用は大きく変わってくるのであり、うまい計画を立てるかどうかによって年間数千万円の違いが出ることもある。また扱う

製品が季節製品なので、６月から８月にかけての３カ月の売り上げは、年間の40%にもなる。したがって、製造設備の能力を決定するときは、需要のピークに合わせるのでなく、少なめの製造能力を持つように設備を設置し、作りだめをして、ピークのときの需要を満たすようにしている。どのくらいの量を作りだめするかによって、製造費用、在庫費用が大きく変わってくる。そこで線形計画法により、生産費用、在庫費用、輸送費用が最小になる計画を立てている。

目的関数は生産費用、在庫費用、輸送費用の和であり、変数は工場の製造量、営業所への配送量、制約としては工場の生産能力、在庫能力、営業所の在庫能力、販売量がある。問題は機械的に定式化するときわめて大きい問題となって扱いにくいため、問題の規模を小さくする工夫がなされている。すなわち、設備、容器の組合せにより品目のグループ化を行ない、変数の数を減らす工夫をしている。具体的には、100品目を22のグループに集約している。それでも制約式の数が約10,000個、変数の数が約36,000個という大きな問題になる。

計算の結果、どのラインで１日あたり何時間稼働し、どの工場でどの製品を何ケース製造し、どの工場からどの営業所に何ケース配送すればいいかというふうに最適解が出てくる。ただし、その解をそのままうのみにして使用するのでなく、解が現実的なものか検討が加えられる。もしも不都合な所があれば、制約式等を修正して計算をやり直すこともある。

３．４　金融・証券業における応用

３．４．１　金融商品組合せにおける適用

銀行では、普通預金、定期預金以外のものとして、国債、金投資口座、外貨投資口座、抵当証券等の金融商品が扱われている。三菱銀行では、顧客に対する金融商品の組合せ決定の過程で線形計画法が用いられている例がある。金融商品は、おのおの利回り、運用期間、購入の最小単位、銀行の手持ちの在庫量

が異なるものであり、顧客の要望にかなった金融商品の組合せの決定に利用されているのである。

定式化はどのような金融商品をいつどの程度運用するかということを考えて行なう必要がある。その際、計画期間が長くなるにしたがって大きな問題になり、通常、制約式の数は数10から数100、変数の数は数10から数100個くらいにもなる。

以前は線形計画法を用いず、顧客からの要望により担当者が試行錯誤的に計算を行なっていたが効率が悪かったということである。

３．４．２　株式投資における適用

㈱ＭＴＢインベストメントテクノロジー研究所では、三菱信託銀行との共同開発の株式運用システムのなかの一部で、株式投資のポートフォリオ選択最適化の計算で線形計画法を利用している。

ここでは、時価総額、配当利回り、ＢＰＲ、自己資本比率、ＥＰＲ（株価収益率）などの数十種類の指標の財務指標をデータベース化している。これらの財務指標は株式投資の対象になる各社により異なる値を持つ。線形計画法利用の目的は、それぞれの企業に対する投資比率をうまく定めて、全体としてバランスのとれた投資比率の組合せを決定することである。例えば、株価収益率がある上限と下限に入ること、配当利回りの上限と下限の制約、業種構成比率、回転率の制約などが制約として組み込まれる。

４．定式化における前提条件

実際の問題を線形計画問題として定式化するときは、何を変数とし、何を目的関数とし、どのような制約式を作ればいいかなどに関して慎重に検討する必要がある。生産計画や飼料配合問題などは比較的理解しやすい問題であるが、問題を定式化（モデル化）するときに導入した前提条件の妥当性については十

分検討する必要がある。

(1)　生産計画の問題では、暗黙のうちに生産費用が生産量に比例するとみなすことが多い。しかし現実には大量効果といって多く作ると単位生産費用が小さくなる場合があり、また逆に生産量が多くなると、例えば残業が必要となるために単位生産費用が増加することもあり得る。このようなときには近似的に生産費用が生産量に比例するとみなしてよいかどうか検討する必要があるだろう。

(2)　飼料配合問題は経済的献立問題と同じ種類の問題であるが、第３章でも述べたように、単純に定式化すると得られた最適解がそのまま用いられないことが多い。飼料には動物の好みがあるからである。まして人間に対する食品の好みには個人差も大きいので、経済的献立問題に線形計画法を適用するときはもっと慎重な配慮が必要である。また人間の場合、単に１日に食べるべき食品（材料）の量が定められただけでは献立を作ったことにはならないのであるから、さらに実用的なモデルが必要であることがわかる。

(3)　典型的な線形計画問題の例である輸送問題における大きな前提条件は、供給地と消費地の間の輸送費用を輸送量に比例するとしていることで、この前提条件は各供給地から物資を載せた複数のトラックが各トラックの担当する複数の消費地を巡回して物資を積み降ろして行くような問題設定の場合には妥当性をもたない場合がある。そして、トラックのサイズとか、各トラックがどの消費地を担当してどういう経路で巡回するかなどを考慮しなければならない場合には、急に問題はむつかしくなるし、線形計画問題として定式化できない場合が多い。

５．おわりに

本論文では、数理計画法の中でも特に歴史が古く、汎用的でかつ完成度の高い手法である線形計画法のみに限定してその実社会での適用の実態を明らかに

した。その内容は以下のようにまとめられる。

(1)　やや複雑な線形計画問題の例題を用いてその定式化のしかたを示した。

(2)　第一次産業、第二次産業、第三次産業において実際に線形計画法を適用している例として、それぞれ畜産業、石油精製業と清涼飲料業、金融・証券業を取り上げて状況を調査し、その結果に基づいて現状を明らかにした。

(3)　企業において線形計画法を適用するときの一般的な留意事項として定式化の際導入する前提条件の妥当性について検討した。

謝　辞

本論文の第3章の部分は1989年および1993年に放送大学の教材作成時の取材に伴って行なわれた調査の一部を元にしている。ご指導いただいた元放送大学教授で大阪府立大学名誉教授の加瀬滋男先生、三菱石油㈱の高井英造氏（現在静岡大学教授）、取材に協力いただいた広島大学講師の三谷克之先生、甲南大学教授の中山弘隆先生、三菱石油㈱水島製油所の芳武章氏、日本コカ・コーラ㈱の浅井三郎氏、西原純子氏、三菱銀行本店の山縣正靖氏、塚田正泰氏、ＭＴＢインベストメントテクノロジー研究所の竹原均氏に感謝申し上げたい。

参考文献

[1]　日本オペレーションズ・リサーチ学会編、「ＯＲ事例集」、日科技連、(1983)

[2]　日本オペレーションズ・リサーチ学会編、「ＯＲ事例集1991」、日科技連、(1991)

[3]　加瀬滋男・横山雅夫著「数理計画法」、放送大学教育振興会、(1989)

[4]　横山雅夫著：「線形計画法」、放送大学教育振興会、(1993)