商学論集　第72巻第4号　　2004年3月

【論　文】

ファジィ計画法と2段階可能性計画問題の定式化

董　　彦文

Abstract: In this paper, we deal with the programming problems involved with uncertainty/fuzzy/imprecise factors. At first, we systematically introduce models and methods of stochastic programming where uncertain input data should be modeled by probability distributions. Then we give a description in brief of fuzzy programming problems where fuzzy/imprecise factors should be modeled by possibility distributions. Furthermore, we consider two stage possibilistic programming problems and give a definition and formulation of the problems. A solution methods of the problems are proposed, which the generalized mean value of fuzzy numbers is introduced to calculate fuzzy mean value. It has be proven that two stage possibilistic programming problems are equivalent to parametric crisp programming problems in the situation where the fuzzy resource coefficient can be represented by triangular fuzzy numbers.

Keyword: Fuzzy Mathematical Programming, Recourse, Two-Stage Programming, Stochastic Programming

1. はじめに

工学や社会科学の諸分野において，システムの「最適化」を図ることは非常に重要である。数理計画法は最適化すべき問題をいくつかの変数と数式を含む数学モデルに定式化し，それを解くための方法論を提供する。これは，数理工学，とくにオペレーションズ・リサーチの主要なテーマの一つと位置づけられ，システム科学，情報科学，経営科学などの分野において基礎的な役割を果たしている。個人レベルの資産運用管理から企業・組織レベルの経営計画・生産計画編成，さらに国家レベルの大型プロジェクトおよび社会システムの企画・運営管理など数多くの問題は数理計画問題として扱われて，有効な解決策が得られている。

従来の数理計画法では，対象とする問題に含まれる各種の要因のなか，確定値で既知のものを係数，意思決定の対象とするものを変数，変数間の関連を制約条件，達成しようとするシステムの目標または意思決定の評価基準を目標関数として表現し，問題の数学モデルを構築する。また，制約条件や係数，目標関数などが明確に決められて，正確な数値または数式で表現されているものと仮定してきた。

しかし，現実問題には正確な数値または数式で表現できない要素が多数存在する。天気変化などには物事固有の不確実性が含まれる。また，人間の嗜好や主観判断はあいまいなところが多い。さらに，時間とコストの制限で不完全な情報しか入手できないことがよくある。これらの不確実性，あいまいさと不完全･不確かな情報が意思決定に与える影響を無視できない場合，問題の不確実性，あいまいさと不完全・不確かさを何らかの形で表現し，意思決定のプロセスにおいてこれらを考慮に

入れることは必要である。

問題の不確実性を確率分布として表現する確率理論に関する研究は19世紀から盛んに行われ，1950年代から確率理論を意思決定問題に導入し，確率数理計画法という新しい研究分野が登場した。これは，確率理論の最新研究成果を不確実な制約条件や目標関数を含む数理計画問題の解決に適用し，数多くの確率計画問題のモデルと手法が提案されている[1][2]。

1965年L.A. Zadeh教授がファジィ論理の概念を導入してから，ファジィ理論はあいまいさと不完全・不確かさを扱うのに非常に有効な概念と手法であり，様々な分野の研究者と実務者たちの注目を集めてきた。同様に，ファジィ理論はあいまいまたは不確かな要素を含む意思決定問題の解決に適用され，問題の複雑化，大規模化，多様化と変動などに対応できる有効な手法として広く研究されてきている。数理計画法の分野でも，ファジィ理論が導入され，制約条件や目標関数，係数などのもつあいまいさと不完全・不確かさをファジィ集合で表現したファジィ数理計画問題が数多く取り上げられ，解法としてのファジィ数理計画法に関しても多数のモデルと手法が提案されている[3][4]。

そこで，本研究では，線形計画問題に限定し，まず確率計画問題のモデルと解法の概要を体系的に整理し，次にファジィ計画問題の分類・モデルと主要解法を説明する。さらに，これまでにあまり研究されていない2段階可能性計画問題を取り上げ，この問題の定義と定式化を与える。最後に，2段階可能性計画問題の解法を検討のうえ，確率計画法の2段階問題と比較しながら，2段階可能性計画問題の特徴を調べる。

2.　確率計画問題と確率計画法

2.1　確率計画問題（stochastic programming）

次の線形計画問題P1を考える。

問題P1

Minimize　$Z=cx$　(1)

Subject to

$Ax \leq b,\ x \geq 0$　(2)

ただし，x は n 次元決定変数列ベクトル，c, A, b はそれぞれ n 次元行ベクトル，$m \times n$ 次元行列と m 次元列ベクトルである。

係数行列 c, A, b の各要素が通常の確定値である場合，よく知られるシンプレックス法を用いて問題P1の最適解と最適値を求めることができる。しかし，係数行列 c, A, b の各要素が確率変数である場合，通常の線形計画問題と区別し，問題P1を次のとおりに書き直す。

問題 P2

$$\text{Minimize}\quad Z=c(\omega)x \tag{3}$$

Subject to

$$A(\omega)x\leq b(\omega),\ x\geq 0 \tag{4}$$

ただし，$c(\omega)$, $A(\omega)$, $b(\omega)$ は確率空間 (Ω, K, P) 上で定義された確率変数を要素とする係数行列である。Ω が標本空間，K が標本空間 Ω の部分集合族である σ 集合体，P が σ 集合体 K 上で定義された確率測度である。また，$c(\omega)$, $A(\omega)$, $b(\omega)$ の各要素の分布関数をそれぞれ $F_c(\omega)$, $F_A(\omega)$, $F_b(\omega)$ と記する。

確率計画問題 P2 では，$c(\omega)$, $A(\omega)$, $b(\omega)$ が確率変数であり，それらの値が確率に変動するため，$c(\omega)$, $A(\omega)$, $b(\omega)$ のすべての実現値に対して，目標関数を最小にする決定変数 x は特別な場合を除いて一般には存在しない。つまり，制約式 (4) を満たす実行可能解 x の集合を $D(\omega)$ とすると，任意の $\omega\in\Omega$ と任意の $x\in D(\omega)$ に対して，$c(\omega)x_0\leq c(\omega)x$ を満たす x_0 は存在しない。

この確率計画問題を解決するには，次の２つのアプローチが提案されている[1][2]。

(1)　wait and see アプローチ

意思決定をする前，まず確率変動する係数行列 $c(\omega)$, $A(\omega)$, $b(\omega)$ の実現値に関する情報を収集する。これらの確率変動する要素の実現値を知った後に意思決定をする。Madansky, A.M. [5] は実現値を知った後に意思決定をすることを「待って，よく見，よく聞いて」意思決定するという意味で，wait and see アプローチと呼んだ。

野球やサッカーなどのスポーツ業界では，従来勘と技術がすべてであり，試合結果が確率性の強い事件であると思われていたが，いま過去の試合結果から選手の個人データまで様々なデータを集めることが重要視され，そしてこれらのデータを基に，試合に参加する選手と具体的試合方法を決めることはよく行われている。日常よく使われたこの手法を確率計画問題としてモデル化すれば，wait and see アプローチとなる。

(2)　here and now アプローチ

実現値を知った後に意思決定をする wait and see アプローチに対して，現実には確率変動する要素の実現値を知る前に意思決定しなければならない場合が多い。また，そのときにこそ意思決定が重要である。実現値を知る前に意思決定をしなければならない場合を今直ちにという意味で here and now アプローチと呼んだ。

here and now アプローチでは確率変動する要素の実現値に関する情報がないので，何を基準にして意思決定をするかとか，確率変数の実現値との関係で解が実行可能でなくなった場合はどうするかなどが問題となる。これらの問題を解決するための手法または考え方により，here and now アプローチはさらにリコース問題（stochastic programming with recourse）または２段階問題（two stage programming）と，機会制約条件問題（chance constrained programming）に分かれる。

here and now アプローチでは，意思決定の方が先であるので，意思決定時に考慮した確率変動要素の予想値と実際の実現値との間差異が存在し，この差異によって制約条件などが成り立たなくなるのは問題である。この差異に対して何らかの行動を起こして埋める（この行動をリコースという）

か，そう頻繁でなければ，何回かは我慢するという2つの態度がある。前者はリコース (recourse) を考えるということでリコース問題（stochastic programming with recourse）と言い，最初 Madansky, A.M. [5] により2段階問題として，さらには一般形として Walkup, D.W. and Wets, R.J.B. [6] により提唱された。後者は機会制約条件（chance constraint）を考えた機会制約条件問題（chance constrained programming）として Charnes, A. and Cooper, W.W. [7] により提唱された。

2.2　分布問題

wait and see アプローチでは，確率変動する要素の実現値を知った後に意思決定をするので，確率計画問題 P2 では確率変動する係数行列の実現値が知った時点で，係数行列 $c(\omega)$, $A(\omega)$, $b(\omega)$ は通常の確定値行列 c, A, b となり，明らかに通常の数理計画手法を用いて問題の最適解を求めることができる。しかしながら，問題の最適解は係数行列の実現値により変わるので，実現値によって最適値や最適解がどう変わるかという分布問題 (distribution problem) を中心に研究が行われてきた[8]。

具体的には，問題 P2 の実行可能解の集合 $D(\omega)$ を

$$D(\omega)=\{x \mid A(\omega)x \leq b(\omega),\ x \geq 0\} \tag{5}$$

と記する。もし次式 (6) を満足させる確率変数 $Z(\omega)$ が存在すれば，$Z(\omega)$ は確率計画問題 P2 の最適値と呼ぶ。

$$Z(\omega)=\min_{x \in D(\omega)} (c(\omega)x) \tag{6}$$

分布問題では確率変数である係数行列 $c(\omega)$, $A(\omega)$, $b(\omega)$ の各要素の分布関数または確率密度関数に基づいて，次の全部または一部の項目を求めて最適値や最適解の性質を調べる。

- 最適値 $Z(\omega)$ の分布関数
- 最適値 $Z(\omega)$ の平均値と標準偏差
- 最適値 $Z(\omega)$ が，与えられた区間内にある確率

具体的な解法としては，係数行列 $c(\omega)$, $A(\omega)$, $b(\omega)$ の分布関数 $F_c(\omega)$, $F_A(\omega)$, $F_b(\omega)$ を基に，何らかの手法で問題 P2 を通常のパラメター付数理計画問題に変換のうえ問題を解く解法と，一般解ではなく直接問題の数値解を与える数値解法が提案されている[8]。

2.3　2段階問題

2段階問題では，確率変動要素の実現値がわかる前の1段階目でまず意思決定を行い，その後わかる実現値とこの意思決定との適合性の“差異”により制約条件の不成立が生じた場合，この差異を埋めるための行動を行う。最適な意思決定は1段階目で意思決定をする費用と2段階目でリコースを行う期待費用の和を最小にするものとする[9][10]。

次の線形計画問題 P3 を考える。

問題 P3

Minimize　$Z = cx$　(7)

Subject to

$Ax = b,\ x \geq 0$　(8)

ただし，x は n 次元決定変数列ベクトル，c, A, b はそれぞれ n 次元行ベクトル，$m \times n$ 次元行列，m 次元列ベクトルである。

問題 P3 の係数行列では，c, A の各要素が通常の確定値であり，b の各要素が分布関数 $F_b(\omega)$ をもつ確率変数 $b(\omega)$ であるとき，任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$Ax = b(\omega)$ を満たす決定変数 x は特別な A を除いて一般には存在しない。また，$b(\omega)$ の各要素が確率変数であるため，Ax と $b(\omega)$ との差異は確率変数となる。リコース問題では，この差異に対していろいろなペナルティ（リコース）を考え，すなわち，cx とペナルティの和を最小にする最適な決定変数 x を求める。この問題の定式化は次のように与えられる。

問題 P4

$\underset{x}{\text{Minimize}}\ (cx + E(\min_{y(\omega)} dy(\omega)))$　(9)

Subject to

$Ax + Wy(\omega) = b(\omega),\ x \geq 0,\ y(\omega) \geq 0$　(10)

ただし，d, W はそれぞれ m 次元行ベクトル，$m \times m$ 次元行列，$y(\omega)$ は m 次元列ベクトルのリコース変数である。E は確率変数の期待値を求める汎関数である。

また，Ax と $b(\omega)$ との差異に関して，正の差異と負の差異を別々に分けて考えるとき，次の単純リコース問題 P5 が定式化されている。

問題 P5

$\underset{x}{\text{Minimize}}\ (cx + E[\min_{y^+(\omega),\ y^-(\omega)} (py^+(\omega) + qy^-(\omega))])$　(11)

Subject to

$Ax + y^+(\omega) - y^-(\omega) = b(\omega),\ x \geq 0,\ y^+(\omega),\ y^-(\omega) \geq 0$　(12)

$y^+(\omega) = \max(b(\omega) - Ax, 0)$　(13)

$y^-(\omega) = \max(Ax - b(\omega), 0)$　(14)

ただし，p, q は m 次元行ベクトル，$y^+(\omega), y^-(\omega)$ は m 次元列ベクトルのリコース変数である。

リコース問題の解法としては，一般的にまず確率変数 $b(\omega)$ の分布関数 $F_b(\omega)$ を基に，確率計画問題 P4 または問題 P5 を通常の数理計画問題に変換する。通常の数理計画手法を用いて，この等価問題の解を求めることによりリコース問題の解を得られる。しかしながら，確率変数 $b(\omega)$ の分布関数によりすべてのリコース問題を通常の数理計画問題に変換できるとは限らない。変換できた場合でも，等価確定問題が非線形計画問題となることがほとんどであるため，リコース問題の解を求めることは容易ではない。

2.4　機会制約条件計画問題

上述したように，制約条件に確率変動する要素が含まれる場合は，常に制約条件を成り立たせることは難しい。二段階問題では，制約条件が成り立たない場合にペナルティを課し，目標関数にこのペナルティを組み込んでいる。これに対して，Charnes, A. と Cooper, W.W. [7] が制約条件の概念を一般化し，制約条件は常には満たされる必要はなく，ある確率以上（この確率レベルを充足水準（satisfying level）という）で満足されればよいとして，機会制約条件という一般化された制約条件を数理計画問題に導入した。この融通性をもたせようとする発想は日常でも見られる。たとえば，天気予報では，近頃または明日は何％の確率で雨というように，確率的な制約条件が見うけられる。

確率計画問題 P2 において，係数行列 $A(\omega), b(\omega)$ が確率に変動するため，任意の $\omega \in \Omega$ に対して，制約条件 $A(\omega)x \leq b(\omega)$ が常に成立するとは限らない。このとき，この条件を緩めて，次式(15)に示すように与えられた確率以上制約条件 $A(\omega)x \leq b(\omega)$ を満足させる問題を考える。

$$P(A(\omega)x \leq b(\omega)) \geq \alpha \tag{15}$$

ただし，P は確率空間（Ω, K, P）上で定義された確率であり，$P(A(\omega)x \leq b(\omega))$ はその中に含まれる条件 $A(\omega)x \leq b(\omega)$ が成立する確率 $P(\{\omega \mid A(\omega)x \leq b(\omega)\})$ を示す。α は m 次元列ベクトルであり，α の各要素 $\alpha_i (i=1,2,\cdots,m)$ は $0 \leq \alpha_i \leq 1$ を満足し，各々の制約条件式が成り立つ確率を表す。

式 (15) が機会制約条件と言われる。また，確率計画問題 P2 において，制約条件式 (4) の代わりに式 (15) を考慮する確率計画問題は機会制約条件計画問題である。

機会制約条件計画問題の基本解法として，まず $A(\omega), b(\omega)$ の分布関数を基に，機会制約条件式 (15) を等価確定条件（Deterministic Equivalent Constraint）に変換する。等価確定条件により元の機会制約条件計画問題は通常の凸計画問題に帰して，この等価凸計画問題の解を求めれば，これが元の確率計画問題の解となる。

また，制約条件式だけでなく，目標関数式 (3) の係数行列 $c(\omega)$ の各要素も確率に変動するとき，$c(\omega)x$ の最小値 $\mathrm{Min}(c(\omega)x)$ を如何に定義するかにより，様々なモデルが考えられている。主なものは以下のモデルがある[1]。

(1)　E モデル

目標関数値の期待値（平均値）$E(c(\omega)x)$ を最小にするモデルを E モデルという。つまり，確率計画問題 P2 の代わりに，次の問題 P6 を考える。

問題 P6

Minimize　$Z = E(c(\omega)x)$　(16)

Subject to

$$P(A(\omega)x \leq b(\omega)) \geq \alpha,\ x \geq 0 \tag{17}$$

(2)　**V モデル**

E モデルでは期待値が最小となってもそのバラツキが大きい場合，計画に不安定性が伴う。期待値を小さくするよりむしろその分散が小さい確実性・安定性の高い意思決定が好ましい場合も多いと思われる。目標関数値の分散 $V(c(\omega)x)$ を最小にするモデルを V モデルという。つまり，確率計画問題 P2 の代わりに，次の問題 P7 を考える。

問題 P7

Minimize　$Z=V(c(\omega)x)$　(18)

Subject to

$P(A(\omega)x\leq b(\omega))\geq\alpha,\ x\geq 0$　(19)

(3)　**確率最大化モデル**

このモデルでは目標関数 $c(\omega)x$ の最小値を求める代わりに，ある一定の基準値を設定しておき，目標関数 $c(\omega)x$ の値がこの基準値以下である確率を最大にする解を求める。つまり，確率計画問題 P2 の代わりに，次の問題 P8 を考える。

問題 P8

Maximize　$P(c(\omega)x\leq f_0)$　(20)

Subject to

$P(A(\omega)x\leq b(\omega))\geq\alpha,\ x\geq 0$　(21)

ただし，f_0 はある決められた基準値を示す定数である。

(4)　**P モデル**

P モデルは確率最大化モデルの双対的なモデルであり，目標関数 $c(\omega)x$ の値がある基準値 f 以下である確率を一定にしておき，この成り立つべき確率レベルの下で，基準値 f を最小にする解を求める。つまり，確率計画問題 P2 の代わりに，次の問題 P9 を考える。

問題 P9

Minimize　f　(22)

Subject to

$P(c(\omega)x\leq f)\geq\beta$　(23)

$P(A(\omega)x\leq b(\omega))\geq\alpha,\ x\geq 0$　(24)

ただし，β は $0\leq\beta\leq 1$ の定数であり，ある決められた確率を示す。

3.　ファジィ数理計画問題とファジィ数理計画法

3.1　ファジィ数理計画問題の分類

上述したとおり，確率計画法は，制約条件や目標関数が確率に変動する状況での数理計画法とし

て提案されてきた。そこでは，不明確な係数が従う確率分布を定めなければならない。十分に多くのデータがある場合には，客観的な確率分布の推定が可能であるが，データが少ない場合には，容易ではない。確率分布を過去のデータから客観的に推定できたとしても，本当に係数がその確率分布に従うかどうかは疑問である。これに対し，専門家の主観的な経験や勘，知識を積極的に取り入れ，問題のあいまいな要素と不完全・不確かさをファジィ集合として表現のうえ，ファジィ集合理論を数理計画問題に導入したファジィ数理計画法（fuzzy mathematical programming）が提案されている[4][11]。

ファジィ数理計画法は，そこで取り扱うあいまいさの性質により，フレキシブル計画問題（狭義のファジィ数理計画問題）と可能性計画問題に分類される[3][11]。

(1)　フレキシブル計画問題（flexible programming problem）

意思決定者の満足水準・希求水準の漠然性を扱う。制約条件の満足度や目標の達成度に対する意思決定者の主観判断は，人により問題場面・時期などにより異なることが多い。フレキシブル計画問題では，この種のあいまいさと不確かさを，主観的希求・選好に基づいたメンバシップ関数を用いて表現し，これを考慮に入れたうえ問題の最適解を求める。

ここでメンバシップ関数の値が制約条件や目標に対する意思決定者の満足水準を表すため，通常フレキシブル計画問題はファジィ不等号を伴い，「だいたいこれ以上」とか「だいたいこれ以下」というようなあいまいな関係でファジィ目標やファジィ制約が与えられる。

一般に，記号“～”を用いて「だいたい」という意味を表す。このとき，ファジィ制約条件やファジィ目標は図1に示すメンバシップ関数をもつ。ただし，図1ではメンバシップ関数が線形関数と三角型・台形型関数である場合を示した。このほか，他の単調増加または単調減少関数，他の凸関数もメンバシップ関数として使うことができる。

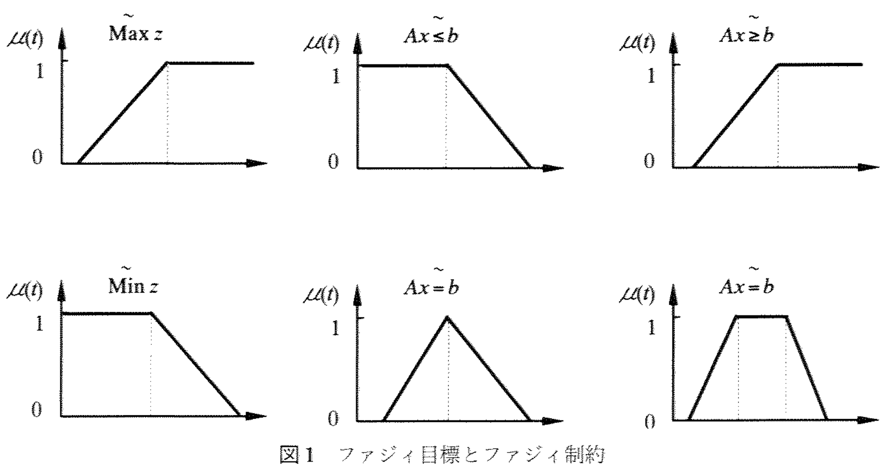

図1　ファジィ目標とファジィ制約

(2)　可能性計画問題（possibilistic programming problem）

物事発生の可能性または存在状態に関する主観的判断または客観的認識における漠然性を扱う。可能性は確率と非常に近い概念で物事発生のあいまいさや不明確さを表す。しかし，「黒色」や「若

い人」に対する認識のように，物事の存在状態に関する主観的判断・認識によく見られる漠然性やあいまいさは確率とは性質の異なるものである。可能性計画問題は，可能性分布関数を用いてこれらのあいまいさと不明確さを表現する。

可能性計画問題は，通常制約条件や目標関数の係数が「だいたいこれくらい」というようなあいまいな形で与えられ，係数のファジィ集合を可能性分布として扱っている。また，ファジィ係数の可能性分布関数に対応するメンバシップ関数としては，様々な凸関数を採用することができるが，計算上の便利さなどの面から，図 2 に示す三角型と台形型メンバシップ関数がよく使われている。

図 2　ファジィ係数のメンバシップ関数例

さらに，上述した 2 種類の漠然性またはあいまいさを同時に扱うファジィ数理計画問題がある。これは，フレキシブル計画問題と可能性計画問題を組み合わせた問題で，やはり可能性計画問題と呼ばれる。

3.2　フレキシブル計画問題

フレキシブル計画問題は，通常次のように定式化される。

問題 P10

Maximize　$z = cx$　(25)

Subject to

$Ax \tilde{\leq} b,\ x \geq 0$　(26)

ただし，x は n 次元決定変数列ベクトル，c, A, b はそれぞれ n 次元行ベクトル，$m \times n$ 次元行列と m 次元列ベクトルである。n 次元実数集合 $X = \{x \mid x \geq 0\}$ として，Ax がだいたい b 以下であるというファジィ制約 C と，目標関数 z がだいたい最大であるというファジィ目標 G は，それぞれのメンバシップ関数

$$\mu_C:\ X \to [0,1]$$
$$\mu_G:\ X \to [0,1]$$

により特性づけられる実数集合 X 上のファジィ集合である。

問題 P10 に定式化された問題を解くために，Zimmermamn[12] は Bellman-Zadeh[13] によって提案された“max-min オペレータ”を用いて，ファジィ目標 G とファジィ制約 C の共通集合 $D = G \cap C$ のメンバシップ関数 $\mu_D(x) = \mathrm{Min}(\mu_G(x), \mu_C(x))$ の値を最大にする解を最適解とする解法を与えた。

つまり，次式 (27) を満たす x^* を求める。

$$\mu_D(x^*) = \underset{x \in X}{\mathrm{Max}}\, \mu_D(x) = \underset{x \in X}{\mathrm{Max}}\{\mathrm{Min}[\mu_G(x),\ \mu_C(x)]\} \tag{27}$$

式 (27) から，Zimmermann のアプローチは，ファジィ目標とファジィ制約条件に関する考え方の違いはなく，ファジィ目標関数とファジィ制約条件に対する満足度の最小値を最大にする解を求める。

問題 P10 では，ファジィ目標関数のメンバシップ関数 $\mu_G(x)$，各々のファジィ制約式 $(Ax)_i \tilde{\leq} b_i$, $i=1,2,\cdots,m$ のメンバシップ関数 $\mu_{C_i}(x)$ が図3に示す線形メンバシップ関数をもつ場合，これらのメンバシップ関数は次式 (28) (29) に表される。ただし，ファジィ目標に対する目標値 b_0 と許容値 p_0，さらに i 番目のファジィ制約式の右辺定数（資源）b_i に対する許容値 $p_i(i=1,2,\cdots,m)$ が意思決定者によって与えられる。

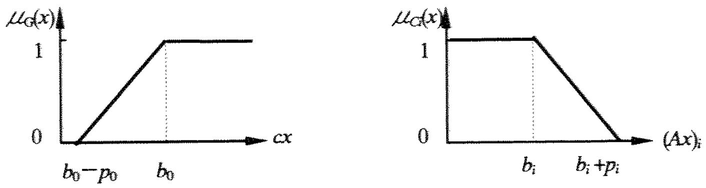

図3　フレキシブル計画問題のファジィ目標とファジィ制約条件

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1 & ;\ cx > b_0 \\ 1 - \dfrac{b_0 - cx}{p_0} & ;\ b_0 - p_0 \leq cx \leq b_0 \\ 0 & ;\ cx < b_0 - p_0 \end{cases} \tag{28}$$

$$\mu_{C_i}(x) = \begin{cases} 1 & ;\ b_i > (Ax)_i \\ 1 - \dfrac{(Ax)_i - b_i}{p_i} & ;\ b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + p_i,\ i=1,2,\cdots,m \\ 0 & ;\ b_i + p_i < (Ax)_i \end{cases} \tag{29}$$

式 (28) (29) を式 (27) に代入すれば，問題 P10 は次の問題 P11 に変換することができる。

問題 P11

Maximize　α　(30)

Subject to

$$\mu_G(x) = 1 - \frac{b_0 - cx}{p_0} \geq \alpha \tag{31}$$

$$\mu_{C_i}(x) = 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{p_i} \geq \alpha,\ i=1,2,\cdots,m \tag{32}$$

$\alpha \in [0,1]$

問題 P11 はクリスプな線形計画問題であり，通常の線形計画手法でこの問題の最適解を求めることができる。

Zimmermann のアプローチは，線形メンバシップ関数をもつフレキシブル計画問題の解法として最初の実践的な手法であり，ファジィ目標とファジィ制約を同一視できる場合（対称形）に適用される。さらに，Zimmermann は，ファジィ目標とファジィ制約を同一視できるフレキシブル計画問題を対称型問題（symmetrical problem），同一視できない場合を非対称型問題（nonsymmetrical problem）と呼び，フレキシブル計画問題の分類を与えた。

非対称型フレキシブル計画問題に関しても，多数のモデルと手法が提案されている。Lai ら [11] がフレキシブル計画問題のモデルを細かく分けて対応する解法を紹介している。

3.3　可能性計画問題と可能性計画法

問題 P1 の係数行列 c, A, b の各要素が図 2 に示した可能性分布関数をもつファジィ数である場合，通常の線形計画問題と区別し，問題 P1 を次のとおりに書き直す。

問題 P12

Minimize　$Z = c(\pi)x$　(33)

Subject to

$A(\pi)x = b(\pi),\ x \geq 0$　(34)

ただし，x は n 次元決定変数列ベクトル，$c(\pi), A(\pi), b(\pi)$ はそれぞれ n 次元行ベクトル，$m \times n$ 次元行列と m 次元列ベクトルである。実数集合 R として，係数行列 $c(\pi), A(\pi), b(\pi)$ の各要素はそれぞれ可能性分布 Π_c, Π_A, Π_b に従い，メンバシップ関数

$$\mu_c(\pi):\ R \to [0,1]$$
$$\mu_A(\pi):\ R \to [0,1]$$
$$\mu_b(\pi):\ R \to [0,1]$$

により特性づけられる 1 次元実数集合 R 上の正規凸ファジィ集合（ファジィ数）である。

確率計画問題 P2 と同様に，可能性計画問題 P12 では，係数行列 $c(\pi), A(\pi), b(\pi)$ の各要素がファジィ数であるため，目標関数の値は一意に決められないファジィ数となり，その最小値は何を意味するのか。また $A(\pi), b(\pi)$ のすべての実現値に対して，$A(\pi)x_0 = b(\pi)$ を満たす決定変数 x_0 は特別な場合を除いて一般には存在しないため，制約条件式 (34) をどうように解釈すればよいか。可能性計画問題を解決するにあたり，これらのファジィ目標とファジィ制約条件の意味と解釈を与えなければいけない。

可能性計画法では，ファジィ目標関数の最小化やファジィ数を含む制約条件に解釈を与え，可能性計画問題 P12 を通常の数理計画問題に変換のうえ問題の解を求める。一般に問題の解釈が無数に存在するので，可能性計画問題に関しては多数のモデルと手法が提案されている。また，問題の背景や意思決定者の意向に応じて，適切な解釈と解法を採用することが必要である。

よく知られる可能性計画法のモデルは次の 2 つがある。

3.3.1　可能性と必然性に基づく可能性計画法

ファジィ目標関数の値を最小にするまたはファジィ数を含む制約条件を満たす可能性あるいは確実性の度合いは可能性測度（possibility measure）と必然性測度（necessity measure）を用いて定義できる。

ファジィ数 M, N のメンバシップ関数をそれぞれ $\mu_M(t)$, $\mu_N(t)$ とするとき，M が N 以上である可能性と必然性（確実性）の度合いはそれぞれ式 (35) と式 (36) で定義される[14]。

$$\mathrm{Pos}(M \geq N) = \sup_{u \geq \nu} \min\{\mu_M(u),\ \mu_N(\nu)\} \tag{35}$$

$$\mathrm{Nes}(M \geq N) = \inf_{u} \sup_{\nu \leq u} \max\{1 - \mu_M(u),\ \mu_N(\nu)\} \tag{36}$$

ただし，Pos と Nes はそれぞれ可能性（possibility）と必然性（necessity）の省略形である。

また，ファジィ数 M が N と等しい可能性と必然性（確実性）の度合いはそれぞれ式 (37) と式 (38) で定義される。

$$\mathrm{Pos}(M = N) = \sup_{u} \min\{\mu_M(u),\ \mu_N(u)\} \tag{37}$$

$$\mathrm{Nes}(M = N) = \min\{\mathrm{Nes}(M \subset N),\ \mathrm{Nes}(N \subset M)\} \tag{38}$$

ただし，$\mathrm{Nes}(M \subset N)$ はファジィ数 M が N に含まれる必然性（確実性）の度合いを表し，次式 (39) で定義される。

$$\mathrm{Nes}(M \subset N) = \inf_{u} \max\{1 - \mu_M(u),\ \mu_N(u)\} \tag{39}$$

ファジィ数を含む制約条件式 (34) の第 i 行を $(A(\pi)x)_i = (b(\pi))_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$ と表す。この m 行の制約条件の中で，できれば満足したい制約条件の添え字集合を I_1，ぜひ満足したい制約条件の添え字集合を I_2 とすると，上述した可能性と必然性を用いて，制約条件式 (34) を次のように扱うことができる。

$$\mathrm{Pos}[(A(\pi)x)_i = (b(\pi))_i] \geq h_i,\ i \in I_1,\ x \geq 0 \tag{40}$$

$$\mathrm{Nes}[(A(\pi)x)_i = (b(\pi))_i] \geq h_i,\ i \in I_2,\ x \geq 0 \tag{41}$$

ただし，h_i は意思決定者により与えられた制約条件式の満足に対する要求値である。

ファジィ目標関数式 (33) に対する解釈により，可能性と必然性に基づく可能性計画法では，様相性最適化モデル (modality optimization model) と満足水準最適化モデル (fractile optimization model) が提案されている[3][15]。

(1)　様相性最適化モデル

様相性最適化モデルでは，できれば達成したい目標値 g^P を設定し，目的関数値が g^P 以下になる可能性を最大化する問題は可能性測度最大化モデルと呼び，次のとおり定式化される。

問題 P13

Maximize $\quad Z=\mathrm{Pos}(c(\pi)x\leq g^P)$ (42)

Subject to

$\mathrm{Pos}[(A(\pi)x)_i=(b(\pi))_i]\geq h_i,\ i\in I_1$ (43)

$\mathrm{Nes}[(A(\pi)x)_i=(b(\pi))_i]\geq h_i,\ i\in I_2$ (44)

$x\geq 0,\ i=1,2,\cdots,m$

また，ぜひ達成したい目標値 g^N を設定し，目的関数値が g^N 以下になる必然性を最大化する問題は必然性測度最大化モデルと呼び，次のとおり定式化される。

問題 P14

Maximize $\quad Z=\mathrm{Nes}(c(\pi)x\leq g^N)$ (45)

Subject to

$\mathrm{Pos}[(A(\pi)x)_i=(b(\pi))_i]\geq h_i,\ i\in I_1$ (46)

$\mathrm{Nes}[(A(\pi)x)_i=(b(\pi))_i]\geq h_i,\ i\in I_2$ (47)

$x\geq 0,\ i=1,2,\cdots,m$

(2) 満足水準最適化モデル

満足水準最適化モデルでは，様相性最適化モデルとは逆に，目的関数値の達成可能性に対する要求値 h^P を与え，目的関数値が g 以下である可能性が g^P 以上という条件のもとで，g を最小化する問題は可能性満足水準最適化モデルと呼び，次のとおり定式化される。

問題 P15

Minimize $\quad g$ (48)

Subject to

$\mathrm{Pos}(c(\pi)x\leq g)\geq h^P$ (49)

$\mathrm{Pos}[(A(\pi)x)_i=(b(\pi))_i]\geq h_i,\ i\in I_1$ (50)

$\mathrm{Nes}[(A(\pi)x)_i=(b(\pi))_i]\geq h_i,\ i\in I_2$ (51)

$x\geq 0,\ i=1,2,\cdots,m$

また，目的関数値の達成必然性に対する要求値 h^N を与え，目的関数値が g 以下である必然性が g^N 以上という条件のもとで，g を最小化する問題は必然性満足水準最適化モデルと呼び，次のとおり定式化される。

問題 P16

Minimize g (53)

Subject to

$\mathrm{Nes}(c(\pi)x \leq g) \geq h^N$ (53)

$\mathrm{Pos}[(A(\pi)x)_i = (b(\pi))_i] \geq h_i,\ i \in I_1$ (54)

$\mathrm{Nes}[(A(\pi)x)_i = (b(\pi))_i] \geq h_i,\ i \in I_2$ (55)

$x \geq 0,\ i = 1,2,\cdots,m$

3.3.2　他の可能性計画法

可能性計画問題 P12 については，可能性と必然性に基づく可能性計画法のほかに，多数のモデルと手法が提案されている。Lai ら［11］は係数行列 c, A, b が可能性分布に従うファジィ数 $c(\pi)$, $A(\pi)$, $b(\pi)$ であるかに基づいて，可能性計画問題のモデルとそれに対応する可能性計画法を整理した。その結果を次表1に示す。各解法の詳細は Lai ら［11］の本を参照されたい。

表 1.　可能性計画問題のモデルと解法

No	可能性計画問題のモデル	提案された可能性計画法
1	A と b がファジィ数 $A(\pi)$, $b(\pi)$ である問題	・Ramik & Rimanek の解法［16］ ・田中らの解法［17］ ・Dubois の解法［18］
2	c または b がファジィ数 $c(\pi)$, $b(\pi)$ である問題	・Lai & Hwang の解法［11］ ・Rommelfranger らの解法［19］ ・Delgado らの解法［20］
3	c, A, b がすべてファジィ数 $c(\pi)$, $A(\pi)$, $b(\pi)$ である問題	・Lai & Hwang の解法［11］ ・Buckley の解法［21］ ・Negi の解法［22］ ・Fuller の解法［23］
4	・A がすべてファジィ数 $A(\pi)$ である問題 ・c と A がファジィ数 $c(\pi)$, $A(\pi)$ である問題 ・c と b がファジィ数 $c(\pi)$, $b(\pi)$ である問題	・Lai & Hwang の解法［11］
5	A と b がファジィ数 $A(\pi)$, $b(\pi)$ であり，かつファジィ不等号$\tilde{\leq}(\tilde{\geq})$を含む問題	・Delgado らの解法［24］
6	c がファジィ数 $c(\pi)$ であり，かつ b が図1に示したメンバシップ関数をもつファジィ数である問題	・Lai & Hwang の解法［11］
7	c が確率に変動するファジィ数 $c(\pi)$ である問題	・Lai & Hwang の解法［11］

4.　2段階可能性計画問題の提案

4.1　本研究の位置づけ

上述したように，可能性計画問題については，多数のモデルと手法が提案されている。可能性は

物事発生のあいまいさや不明確さを表し，確率と非常に類似した概念であるため，確率計画問題と比較しながらいままでの可能性計画問題モデルと手法を分類すると，表2に示す結果を得られた。

表2. 確率計画法と可能性計画法との比較

確率計画法	⟺	可能性計画法	
		モデル	公表研究結果
分布問題	⇔	可能性分布問題？	ほとんどなし
機会制約条件問題	⇔	満足水準最適化・様相性最適化問題	多数
2段階問題	⇔	2段階可能性計画問題	少ない

表2からいままでの可能性計画法については，確率計画法の機会制約条件問題に対応する問題を中心に，多数のモデルと手法が提案されていたが，確率計画法の分布問題に対応する可能性計画問題についてはまだ研究されていないので，これからの新研究分野として期待されるであろう。また，確率計画法の2段階問題に対応する2段階可能性計画問題については，董らの研究[25][26][27]を除いてほとんど公表されていないため，まだ研究が非常に不十分である。

そこで，本研究の目的は，これらの課題を明確にしたうえ，董らの研究結果［25][26］を見直して，2段階可能性計画問題の新たな定式化を行う。

4.2 2段階可能性計画問題の定式化

次の線形計画問題P17を考える。

問題 P17

Minimize $Z = cx$ (56)

Subject to

$Ax = b,\ x \geq 0$ (57)

ただし，x は n 次元決定変数列ベクトル，c, A, b はそれぞれ n 次元行ベクトル，$m \times n$ 次元行列，m 次元列ベクトルである。

問題P17では，c, A の各要素が通常の確定値であり，b の各要素がメンバシップ関数$\mu_b(\omega)$をもつ可能性分布に従うファジィ数 $b(\pi)$ である場合，ベクトル $b(\pi)$ の各要素がファジィ数であるため，特別な係数行列またはメンバシップ関数を除いて，制約式 $Ax = b(\pi)$ さえ成り立たなくなってしまう。このため，Ax と $b(\pi)$ との差異を考える。この差異を y として，y はファジィ数 $b(\pi)$ を通してファジィ数となる。y を $y(\pi)$ と記すれば，

$$y(\pi) = b(\pi) - Ax \tag{58}$$

となる。

確率計画法の2段階問題と同様に，次の2段階を分けて可能性計画問題P17の解を求めることができる。

(1)　$b(\pi)$の実現値が分かる前に，まず第1段階目の意思決定を行う。このときのコストはcxである。

(2)　第2段階目において，$b(\pi)$ のある実現値が分かったら，差異$y(\pi)$ を評価する。さらにこの差異に対してリコース行動を行う。差異$y(\pi)$ を埋めるためのリコースコストは$dy(\pi)$ である。ただし，dはm次元行ベクトルであり，1単位あたりの差異に対するペナルティを表す。

2段階可能性計画問題では，第1段階の意思決定コストcxと第2段階のリコースコスト$dy(\pi)$との和である総コストを最小にする決定変数xを求める。また，リコースコスト$dy(\pi)$がファジィ数であるので，$y(\pi)$ の各々の実現値とこの実現値の発生可能性を考慮に入れて，リコースコスト$dy(\pi)$の平均値を評価すべきである。このため，総コストは第1段階の意思決定コストcxと第2段階のリコースコストの平均値との和である。

しかし，ファジィ数の平均値については，確率変数の期待値のように統一された定義はまだ存在しないため，リコースコスト$dy(\pi)$の平均値を如何に定義するかにより問題の定式が異なる。ここでは，まずファジィ数の平均値を取る汎関数または演算子を形式的にFuzzy Meanと表す。つまり，Fuzzy Mean(u) はファジィ数uの平均値を求めることを意味する。Fuzzy Meanの具体的定義に関しては次の4.3節で検討する。

この考え方に基づいて，次のように2段階可能性計画問題の定式化を与える。

問題 P18

$$\text{Minimize } [cx + \textit{Fuzzy Mean}\ (dy(\pi))] \tag{59}$$

Subject to

$$Ax + y(\pi) = b(\pi),\ x \geq 0,\ y(\pi) \geq 0 \tag{60}$$

ただし，Fuzzy Meanはファジィ数の平均値を求める演算子を表す。

また，正の差異のみならず負の差異も考慮に入れるべき場合は多くある。このとき，次のように2段階可能性計画問題の定式化を与える。

問題 P19

$$\text{Minimize } [cx + \textit{Fuzzy Mean}\ (py^{+}(\pi) + qy^{-}(\pi))] \tag{61}$$

Subject to

$$Ax + y^{+}(\pi) - y^{-}(\pi) = b(\pi),\ x \geq 0 \tag{62}$$

$$y^{+}(\pi) = \max(b(\pi) - Ax, 0) \tag{63}$$

$$y^{-}(\pi) = \max(Ax - b(\pi), 0) \tag{64}$$

ただし，p, qはm次元行ベクトルであり，1単位あたりの差異に対するペナルティを表す。$y^{+}(\pi)$，$y^{-}(\pi)$ はm次元列ベクトルでファジィリコース変数である。

上述したように，2段階確率計画問題P4とP5の解を求めるには，通常これらの問題を等価確定問題に変換して，得られた等価確定問題の解を元の確率計画問題の解とする。確率計画問題を等価確定問題へ変換することが難しい上，変換できたとしても等価確定問題が通常非線型計画問題となり，容易に解けない。また，最低限で確率変動要素の分布関数が必要である。これに対して，2段階

可能性計画問題P18とP19では，Fuzzy Meanの定義を適切に選択することにより複雑な問題でも容易に解ける場合が多い。

4.3 2段階可能性計画問題の解法

2段階可能性計画問題P18とP19では，ファジィ数の平均値を求める演算子Fuzzy Meanを導入したが，上述したようにファジィ数の平均値については，統一された定義がまだ存在しない。このFuzzy Meanをどのように定義するかにより，2段階可能性計画問題の解法をいろいろと提案することができる。ここでは，一般化期待値を導入する解法を提案する。

確率変数の期待値に対応して，Lee & Li [28] がファジィ数の一般化期待値GMV (Generalized Mean Value)を提案した。具体的に，ファジィ数 N のメンバシップ関数を $\mu_N(t)$ とすれば，N の一般化期待値 $\mathrm{GMV}(N)$ は次式（65）により計算される。

$$\mathrm{GMV}(N)=\frac{\int_S t\mu_N(t)\,dt}{\int_S \mu_N(t)\,dt} \tag{65}$$

ただし，S はファジィ数 N の台集合である。

問題P18のFuzzy meanを一般化期待値GMVで置き換えれば，式（59）は

$$\text{Minimize } [cx+\mathrm{GMV}(dy(\pi))] \tag{66}$$

となる。

確率変数の期待値よりファジィ数の一般化期待値GMVの計算が簡単なので，複雑な問題でもその解を求めることができる。

ファジィ数 N が図4に示す三角型ファジィ数 $N=\langle\!\langle N^L, N^M, N^R\rangle\!\rangle$ である場合，

$$\mathrm{GMV}(N)=(N^L+N^M+N^R)/3 \tag{67}$$

となる。

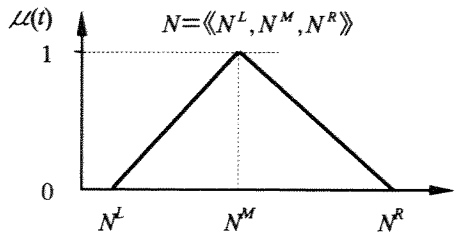

図4　三角型ファジィ数

b^L, b^M, b^R および y^L, y^M, y^R はすべて m 次元列ベクトル，ファジィ係数 $b(\pi)=\langle\!\langle b^L, b^M, b^R\rangle\!\rangle$，ファジィリコース変数 $y(\pi)=\langle\!\langle y^L, y^M, y^R\rangle\!\rangle$ とすれば，式（66）は

$$\text{Minimize } [cx+d(y^L+y^M+y^R)/3] \tag{68}$$

となる。

また，$\alpha\in[0,1]$ として，$b(\pi)$ と $y(\pi)$ の α-レベル集合をそれぞれ $b(\pi)_\alpha=[b_{L\alpha}, b_{R\alpha}]$ と $y(\pi)_\alpha=[y_{L\alpha}, y_{R\alpha}]$ と定義する。ただし，

$$b_{L\alpha}=(1-\alpha)b^L+\alpha b^M,\ b_{R\alpha}=\alpha b^M+(1-\alpha)b^R \tag{69}$$

$$y_{L\alpha}=(1-\alpha)y^L+\alpha y^M,\ y_{R\alpha}=\alpha y^M+(1-\alpha)y^R \tag{70}$$

$b(\pi)$ と $y(\pi)$ の α-レベル集合を制約条件式（60）に導入すれば，式（60）を次の式（71）と（72）

で置き換えることができる。

$$Ax + y_{L\alpha} \geq b_{L\alpha} \tag{71}$$

$$Ax + y_{R\alpha} \leq b_{R\alpha} \tag{72}$$

式(68)～(72)の結果をまとめると，2段階可能性計画問題 P18 は次に示す通常の計画問題 P20 に帰着できる。

問題 P20

Minimize $[cx + d(y^L + y^M + y^R)/3]$ (73)

Subject to

$$Ax + (1-\alpha)y^L + \alpha y^M \geq (1-\alpha)b^L + \alpha b^M \tag{74}$$

$$Ax + \alpha y^M + (1-\alpha)y^R \leq \alpha b^M + (1-\alpha)b^R \tag{75}$$

$$\alpha \in [0,1],\ x \geq 0,\ y^L, y^M, y^R \geq 0 \tag{76}$$

明らかに問題 P20 はパラメター α を含む通常の線形計画問題である。α の値が与えられると，よく知られるシンプレックス法を用いて問題 P20 の最適解と最適値を簡単に求めることができる。

5. 終わりに

本研究では不確実・不確かな要素を含む数理計画問題を検討して，得られた成果を要約すれば，次のとおりである。

(1) 不確実な要素が確率分布として表される場合，研究の非常に多い確率計画問題と確率計画法を体系的に整理し，その概要を与えた。

(2) 不確かな要素を主観的選好に基づいたメンバシップ関数または可能性分布として表現すべき場合，これまでに提案されたファジィ数理計画問題および可能性計画問題の分類と主なファジィ数理計画法を説明した。

(3) いままであまり検討されていない2段階可能性計画問題を考究し，この問題の新しい定式化を与えた。

(4) ファジィ数の平均値の定義に一般化期待値を導入した場合，2段階可能性計画問題の解法を検討した。特に係数行列が三角型ファジィ数である場合，2段階可能性計画問題が通常の線形計画問題に帰着できることを明らかにした。

参考文献

[1] 石井博昭："多様化時代の数理計画法 第3回 確率計画法"，オペレーションズ・リサーチ，pp. 504-509, 1996年9月号。

[2] 石井博昭："確率論的最適化"，伊理正夫今野浩(編)：数理計画法の応用(理論編)，pp. 1-40，産業図書(1982)。

[3] 乾口雅弘："多様化時代の数理計画法 第4回 可能性計画法"，オペレーションズ・リサーチ，pp. 569-574, 1996年10月号。

[4] 日本ファジィ学会編：ファジィOR，日刊工業新聞社（1993)。
[5] Madansky, A.M.: "Inequalities for stochastic linear programming problem", Management Sciences, Vol. 6, pp. 197-204 (1960)。
[6] Walkup, D.W. and Wets, R.J.B.: "Stochastic programming with recourse", Siam. J. on Applied Mathematics, Vol. 15, pp. 1299-1314 (1967).
[7] Charnes, A. and W.W. Cooper: "Chance constrained programming", Management Sciences, Vol. 6, pp. 73-79 (1959)。
[8] I.M. Stancu-Minasian: Stochastic Programming with Multiple Objective Functions, pp. 71-118, D. Reidel Publishing Company (1984).
[9] Kall, P., and Mayer, J.: "On Solving Stochastic linear Programming Problems", in Marti, K. and Kall, P. (eds.): Stochastic Programming Methods and Technical Applications, pp. 329-344, Springer-Verlag (1998).
[10] Wets, R.J.B.: Stochastic programming, Handbooks in Operational Research and Management Science/Optimization, pp. 573-629, G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Ran and M.J. Todd (eds.), North-Holland, Amsterdam (1989).
[11] Lai, Y.-J. and Hwang, C.-L: Fuzzy Mathematical Programming, Method and Applications, Springer-Verlag (1992).
[12] Zimmermann, H.-J.: "Description and optimization of fuzzy systems", International Journal of General Systems, Vol. 2, pp. 209-216 (1976).
[13] Bellman, R.E. and Zadeh, L.A.: "Decision-making in a fuzzy environment", Management Sciences, Vol. 17B, pp 141-164 (1970).
[14] 坂和正敏：ファジィ理論の基礎と応用，pp. 62-72，森北出版（1995).
[15] 乾口雅弘，坂和正敏："ファジィ最適化"，日本ファジィ学会編集：ファジィとソフトコンピューティングハンドブック，pp. 324-327，共立出版（2000).
[16] Ramik, J. and Rimanek, J.: "Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 16, pp. 123-138 (1985).
[17] Tanaka, H., Ichihashi, H. and Asai, K.: "A formulation of fuzzy linear programming problems based on comparison of fuzzy numbers", Control and Cybernetics, Vol. 13, pp. 186-194 (1984).
[18] Dubois, D.: "Linear programming with fuzzy data", in Bezdek, J.C.: Analysis of Fuzzy Information (Vol. III): Applications in Engineering and Sciences, pp. 241-263, CRC Press, Boca Raton (1987).
[19] Rommelfanger, H., Hanuscheck, R. and Wolf, J.: "Linear programming with fuzzy objectives", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 29, pp. 31-48 (1989).
[20] Delgado, M., Verdegay, J.L. and Vila, M.A.: "Relating different approaches to solve linear programming problems with imprecise costs", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 37, pp. 33-42 (1990).
[21] Buckley, J.J.: "Possibilistic linear programming with triangular fuzzy numbers", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 26, pp. 135-138 (1988).
[22] Negi, D.S: Fuzzy Analysis and Optimization, Ph. D. Dissertation, Dept. of I.E., Kansas State University (1989).
[23] Fuller, R.: "On a special type of fuzzy linear programming". Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Vol. 50, pp. 511-519 (1986).
[24] Delgado, M., Verdegay, J.L. and Vila, M.A.: "A general model for fuzzy linear programming", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 29, pp. 21-29 (1989).
[25] Dong, Y.: "Fuzzy Programming Problem with Recourse: Formulation and Solution", Proceedings of The Second Asia-Pacific Conference on Industrial Engineering and Management Systems (APIEMS '99), Kanazawa, Japan, pp. 485-488 (1999).
[26] Dong Y.: "A GMV Based Solution Method for Fuzzy Programming Problem with Recourse", 商学論集，Vol. 69, No. 3, pp. 1-9 (2001).
[27] Dong, Y.: "One Machine Fuzzy Scheduling to Minimize Total Weighted Tardiness, Earliness, and

Recourse Cost", International Journal of Smart Engineering System Design, Vol. 5, No. 3, pp. 135-147 (2003).

[28] Lee, E.S. and Li, R.J.: "Comparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events", Computers and Mathematics with Applications, Vol. 35, No. 10, pp. 887-896 (1988).