商学論集　第68巻第1号　　1999年8月

【論　文】

ファジィ最短路解法とその解の評価

董　　彦文

［概　要］ 本研究では，弧の距離がファジィ数であるファジィネットワーク最短路問題を取り上げ，ファジィ最短路解法を提案する。得られるファジィ最短路は1本の路ではなく，複数本の非劣路からなる路の集合であるから，ファジィ最短路を評価・選択する方法についても検討し，実用的にも適用できる非劣路の選択手順を提案する。さらに計算例によってその有効性を明らかにする。

1. はじめに

最短路問題とは，地点 A から地点 B へ行く場合に，最短距離（または，最小時間，最小費用など）で到達できる路を求める問題という。この問題をネットワークで表現するとき，地点 x, y がノード x, y で，地点 x から他の地点を経由せず直接地点 y に到達する路がノード x からノード y への弧 $x \to y$ で表される。弧 $x \to y$ の距離は，地点 x から地点 y までの距離（または，通過するのに要する時間，かかる費用など）を表す。

ネットワーク最短路問題に関する研究はこれまで盛んに行われ，数多くの数理的手法が提案されている[1]。しかし，これらの数理的手法を最短路選択や輸送計画などの実際問題に適用する場合，交通混乱などの事情により輸送時間や距離を正確に決めることができなく，直接に適用不可能であろう。このとき，最適解法に人間の判断を加えるのはよく利用されたアプローチである［2]。つまり，まず過去の実績データまたは統計データにより，輸送時間や距離の見積値を決めて，これを正確な数値として従来の数理的手法を適用し，最短路を求める。次に，担当者の経験や主観判断に基づき，この最短路を手直してからはじめて現実解として採用する。

近年来，不確かな輸送距離や時間をファジィ数として捉えたファジィ最短路問題に関する研究が注目され，たくさんの研究報告が公表されている［3]-[6]。従来の最短路解法と異なり，ファジィ最短路解法では，人間の主観判断または客観状況の不確かさが，ファジィ数である輸送距離や時間のあいまいさにより表され，最適解を求めるプロセスそのものにおいてこれらの人間の主観判断または客観状況の不確かさを考慮に入れたので，担当者の主観的な手直しを必要とせず，より現実に近い最適解を得ることができる。しかしながら，一般的には結果としてのファジィ最短路は1本の路ではなく，複数本の非劣路からなる路の集合である。これに対して，実際に最短路選択や輸送計画を行う場合，求められた複数本の非劣路の中から1本の路を選択し実施しなければならないから，非劣路の評価・選択という新しい課題に直面されている。

そこで，本研究では，弧の距離がファジィ数であるファジィ最短路問題を取り上げ，従来の提案

解法と異なる最適化解法を提案のうえ，ファジィ最短路を評価・選択する方法について検討し，実用的にも適用できる非劣路の選択手順を提案し，さらに計算例によってその有効性を明らかにする。

2. 問題の定義

本研究では，次のファジィネットワークにおける最短路問題を対象とする。

(1) s を始点，t を終点とするネットワーク N は，n 個のノード $\{i=1, 2, ..., n, n>1\}$，m 本の弧からなる。

(2) ノード i からノード j への弧 $i \to j$ の距離を $\boldsymbol{d}_{ij}$ とする。そして $\boldsymbol{d}_{ij}$ は普通の定数ではなく，正規な凸ファジィ数である。

(3) 始点 s から終点 t の任意の1本路において，同一の弧を2回以上通らない。

(4) 計画期間にわたって，すべての弧は常に通過可能である。

(5) 目的関数は総距離の最短化とする。つまり，始点 s から終点 t の総距離が最短の路を求める。

また，本論文で使う記号を次のように定義する。

$\boldsymbol{d}_{ij}$: ノード i からノード j への弧 $i \to j$ の距離；

$\mu_{d_{ij}}(x)$: $\boldsymbol{d}_{ij}$ のメンバーシップ関数；

$m(\boldsymbol{d}_{ij})$: $\boldsymbol{d}_{ij}$ の一般化期待値 GMV；

$\mathrm{GMV}(\boldsymbol{d}_{ij})$: $\boldsymbol{d}_{ij}$ の GMV の値を求める演算子または GMV の値；

$x^{k}{}_{ij}$: 路 P_k が弧 $i \to j$ を経過するかを表す 0−1 変数；

$(+)$: ファジィ加法演算子；

Fuzzy Min: ファジィ最小化演算子；

Fuzzy Max: ファジィ最大化演算子。

3. 本研究の位置づけ

最短路問題に関しては，弧の距離が既知定数である通常の最短路問題を中心として，これまで盛んに研究が行われ，Dijkstra 法，べき乗法，Warahall-Floyd 法などの解法が数多く提案されている [1]。しかし，これらの数理的手法を実際問題に適用しようとする場合，主に以下の2つの問題に直面し，更なる研究と実用的処置を必要としている [2]。

(1) 問題の規模（ノードと弧の数）が非常に大きい場合，実用的な計算時間で問題の最適解または準最適解を求めるのはほとんど不可能である。これに対して，探索領域を限定された Dijkstra 法，A* アルゴリズム，階層化経路探索などの解法が提案されている。

(2) ほとんどの現実問題では，弧の距離または時間が既知定数ではなく，不確かな数値である。たとえば，交通渋滞などの事情により同じ路を通過するのにかかる時間が異なる。道幅の広く交通量の多い道路は，信号機，横断歩道，左右折りなどの要因を考慮に入れれば，路の距離を正確な既知定数で表現することができない。このとき，まず人間の経験や主観判断に基づき距離の見積値を決めて，これを正確な距離と見なして通常の数理的手法を適用し，問題の最適解ま

たは準最適解を求める。さらに得られた最適解または準最適解がどの程度で実用できるかは人間の判断に委ねる。

近年来，不確かな距離をファジィ数として捉え，問題の最適解または準最適解を求めるプロセスの中で直接に距離の不確かさを考慮に入れるファジィ最短路問題に関する研究が注目されている。劉ら [3] は，可能性分布を導入し，距離や時間を自然言語で表すときのあいまいさをファジィ数として扱い，可能性分布に基づいた最短路解法を提案した。また，中村ら [4] は，劉らの解法を改良し，ファジィ輸配送最短路計画問題に適用した。Okada ら [5] は独自で定義した区間の順序関係を用いて Dijkstra 法を修正したファジィ最短路解法を与えた。伊藤ら [6] は，不確かな距離を L-R ファジィ数で表し，経路の距離がある値以下となる可能性が最大であるものを最適（最短）とみなし定式化を行い，Dijkstra のアルゴリズムを拡張した解法を提案した。しかし，ファジィ最短路問題に関しては，通常の最短路問題に比べて研究が少なく，不十分なところが多い。

これまでのファジィ最短路問題に関する研究に比べて，本研究は以下のことを特色として，重点に置き考究したい。

(1) これまでに研究の少ないファジィ最短路問題を取り上げ，もっと実用に近い最短路解法を考究する。

(2) 劉ら [3] と中村ら [4] の解法をさらに改良し，ファジィ最短路問題を複数の通常の最短路問題である α-レベル問題に分割して，複数本の非劣路からなるファジィ最短路を求める解法を新たに提案する。

(3) 従来の最短路解法と異なり，ファジィ最短路解法を用いて得られるファジィ最短路は 1 本の路ではなく，複数本の非劣路からなる路の集合である。これに対して，実際に路を選択したり輸送計画を立てる場合，求められた複数の非劣路の中から 1 本の路を選択し実施しなければならない。この非劣路の選択は未解決の課題として残されている。本研究では，ファジィ最短路を評価・選択する方法について検討し，実用的にも適用できる非劣路の選択手順を提案する。

(4) 計算例によって提案解法の有効性を明らかにする。

4. ファジィ数のランキング

4.1 ファジィ数の最大と最小 [7]

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を R 上の 2 つのファジィ数とする。$\forall\alpha\in[0,1]$，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の α-レベル集合を $\boldsymbol{A}_\alpha=[a_L{}^{(\alpha)}, a_R{}^{(\alpha)}]$，$\boldsymbol{B}_\alpha=[b_L{}^{(\alpha)}, b_R{}^{(\alpha)}]$ とする。

［定義 1］ $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のファジィ最小を次のファジィ数 $\boldsymbol{C}$ であると定義し，$\boldsymbol{C}=\mathrm{Fuzzy\ Min}\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$ と記する。

$\forall\alpha\in[0,1]$：

$$\boldsymbol{C}_\alpha=\boldsymbol{A}_\alpha(\wedge)\boldsymbol{B}_\alpha=[a_L{}^{(\alpha)}\wedge b_L{}^{(\alpha)}, a_R{}^{(\alpha)}\wedge b_R{}^{(\alpha)}]$$

または，$\forall x, y, z\in\mathrm{R}$：

$$\mu_{A(\wedge)B}(z) = \bigvee_{z=x\wedge y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{1}$$

［**定義2**］ $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のファジィ最大を次のファジィ数 $\boldsymbol{C}$ であると定義し，$\boldsymbol{C}=\text{Fuzzy Max}\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$ と記する。

$\forall \alpha \in [0,1]$：

$$\boldsymbol{C}_\alpha = \boldsymbol{A}_\alpha(\vee)\boldsymbol{B}_\alpha = [\, a_L^{(\alpha)} \vee b_L^{(\alpha)},\ a_R^{(\alpha)} \vee b_R^{(\alpha)}]$$

または，$\forall x, y, z \in \mathrm{R}$：

$$\mu_{A(\vee)B}(z) = \bigvee_{z=x\vee y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{2}$$

4.2　ファジィ数の一般化期待値と広がり

4.1 節で定義したファジィ最小とファジィ最大はファジィ数である。つまり，ファジィ数を比較した結果はまだあいまいであり，複数のファジィ数の中で，ある1つだけのファジィ数が最大(小)であるといった明確な判断は必ずしも得られない。以下で検討するファジィ最短路評価などのように，複数のファジィ数に対して，あいまいなものではなく，明確な順序づけ（ランキング）を決めなければならない場合もよくある。ファジィ数の順序づけについては，これまでにいろいろな判定基準が提案されており［8］，その中でよく用いられるのは Lee & Li［9］の重心法である。これは，次の2つの基準 R1, R2 によりファジィ数を順序づけるというものである。

［**R1：一般化期待値 GMV による順序づけ**］

式 (3) によりファジィ数 $\boldsymbol{d}$ の一般化期待値 GMV (Generalized Mean Value) を計算し，GMV の値 $m(\boldsymbol{d})$ でファジィ数の順序づけを決める。

$$m(\boldsymbol{d}) = \int_s x\mu_d(x)dx \,/\, \int_s \mu_d(x)dx \tag{3}$$

［**R2：広がり（平均偏差）による順序づけ**］

判定基準 R1 が一意な全順序関係を与えない（同じ GMV 値を持つファジィ数が複数ある）場合，R1 によって得られたファジィ数のそれぞれのクラス内において，さらに式 (4) で広がり(平均偏差) $s(\boldsymbol{d})$ を計算し，$s(\boldsymbol{d})$ の値から順序づけを決める。

$$s(\boldsymbol{d}) = \sqrt{\frac{\int_s x^2\mu_d(x)dx}{\int_s \mu_d(x)dx} - [m(d)]^2} \tag{4}$$

5. 問題の定式化

まず，始点 s から終点 t までのすべての実行可能な路の集合を

$$P = \{P_k,\ k=1, 2, 3, \ldots, p\}$$

とする。また，次の0-1変数を導入し，路 $P_k \in P$ がノード i からノード j への弧 $i \to j$ を経過することを表す。

$$x_{ij}^k=\begin{cases}1;\ P_k \text{ が弧 } i\to j \text{ を通過するとき}\\ 0;\ \text{その他}\end{cases} \tag{5}$$

これによって任意の路 $P_k\in P$ が $\{x_{ij}^k;\ i,\ j=1,2,\dots,n\}$ により表され，$\{x_{ij}^k\}\Leftrightarrow P_k(k=1,2,\dots,p)$ と記す。任意の路 $P_k\in P$ の総距離を，この路が通過するすべての弧距離の合計と定義し，$\boldsymbol{L}^k$ とすれば

$$\boldsymbol{L}^k=(\overset{n}{\underset{i,j=1}{+}})x_{ij}^k\boldsymbol{d}_{ij};\quad k=1,2,\dots,p \tag{6}$$

となる。

上記に基づき，対象とするファジィ最短路問題を次のように定式化することができる。

問題 P

Fuzzy Minimize $\{\boldsymbol{L}^k;\ k=1,2,\dots,p\}$ (7)

Subject to

$$\boldsymbol{L}^k=(\overset{n}{\underset{i,j=1}{+}})x_{ij}^k\boldsymbol{d}_{ij} \tag{8}$$

$$\{x_{ij}^k\}\Leftrightarrow P_k;\ P_k\in P \tag{9}$$

$$x_{ij}^k\in\{0,1\};\ i,j=1,2,\dots,n;\ k=1,2,\dots,p$$

式 (7) はすべての実行可能な路の集合から，ファジィ距離が最短である路の集合 $\boldsymbol{P}^*=\{P_k\}\subset P$ を求めることを表し，式 (8) はある特定の路 P_k の距離を定義するものである。また，式 (9) は意思決定変数 $\{x_{ij}^k;\ i,j=1,2,\dots,n;\ k=1,2,\dots,p\}$ の実行可能性に関する制約であり，つまり，$\forall k=1,2,\dots,p$ に対して，$\{x_{ij}^k;\ i,\ j=1,2,\dots,n\}$ が通過可能な路を表すものでなければならない。

6. 問 題 の 解 法

6.1 Nguyen 定理

$\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_n$ をそれぞれ $X_1,\dots,X_n$ 上のファジィ部分集合とし，対応するメンバーシップ関数を $\mu_{A_1}(x_1),\dots,\mu_{A_n}(x_n)$ で表す。$f:\ X_1\times\dots\times X_n\Rightarrow Y$ が $X_1,\dots,X_n$ の要素 $(x_1,\dots,x_n)$ を Y の要素 $y=f(x_1,\dots,x_n)$ に対応させる写像であるとき，f によるファジィ部分集合 $\boldsymbol{A}_1\times\dots\times\boldsymbol{A}_n$ の像 $B=f(\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_n)$ は Y のファジィ集合である。このとき，次の Nguyen 定理［10］が成立する。

［Nguyen 定理］ 任意の $y\in Y$ に対して，$\mu_B(y)=\mu_{A_1\times\cdots\times A_n}(x_1,\dots,x_n)$ となる $x_1,\dots,x_n$ が存在するとき，

$$[f(\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_n)]_\alpha=f(\boldsymbol{A}_{1\alpha},\dots,\boldsymbol{A}_{n\alpha}) \tag{10}$$

ただし，$\boldsymbol{A}_{i\alpha}(i=1,2,\dots,n)$ は $\boldsymbol{A}_i$ の α-レベル集合，$[f(\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_n)]_\alpha$ は $f(\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_n)$ の α-レベル集合である。

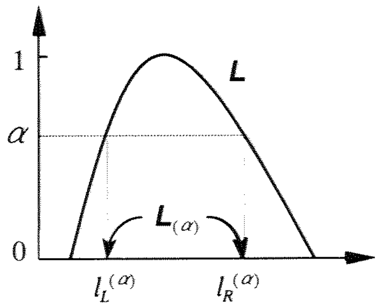

図1.　L の α-レベル集合 $L_{(\alpha)}$

6.2　α-レベル問題

問題Pの中で，弧の距離 $\boldsymbol{d}_{ij}$，路の距離 $\boldsymbol{L}^k$ がメンバーシップ関数を持つファジィ数であるため，直接問題Pの解を求めるのは容易ではない。ファジィ問題Pを解くには，まずこれを非ファジィ問題に変換する必要がある。ファジィ集合と非ファジィ集合の関係が，α-レベル集合を用いて有名な分解定理（decomposition theorem）に与えられる。つまり，図1に示すように，$\boldsymbol{L}$ がファジィ集合，$\forall\alpha\in[0,1]$, $\boldsymbol{L}_{(\alpha)}=[l_L^{(\alpha)}, l_R^{(\alpha)}]$ が $\boldsymbol{L}$ の α-レベル集合であるとすれば，

$$\boldsymbol{L}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\boldsymbol{L}_{(\alpha)} \tag{11}$$

が成立する［10］。

$\forall\alpha\in[0,1]$, $\boldsymbol{d}_{ij}$, $\boldsymbol{L}^k$ の α-レベル集合をそれぞれ $\boldsymbol{d}_{ij(\alpha)}=[d_{Lij}^{(\alpha)}, d_{Rij}^{(\alpha)}]$, $\boldsymbol{L}_{(\alpha)}^k=[l_L^{k(\alpha)}, l_R^{k(\alpha)}]$ とするとき，上述したNguyen定理に基づき，α-レベル集合を導入し，問題Pを次のように α-レベル問題 $\mathrm{P}(\alpha)$ に分解し，各々の α-レベル問題 $\mathrm{P}(\alpha)$ の解を得られたあと，分解定理によりこれらの解を合成して，問題Pの解を求めることができる。

問題 P(α)

Fuzzy Minimize $\{\boldsymbol{L}_{(\alpha)}^k;\ k=1,2,\ldots,p\}$ (12)

Subject to

$$\boldsymbol{L}_{(\alpha)}^k=\sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}^k\boldsymbol{d}_{ij(\alpha)} \tag{13}$$

$$\{x_{ij}^k\}\Leftrightarrow P_k;\ P_k\in P \tag{14}$$

$$x_{ij}^k\in\{0,1\};\ i,j=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,p$$

しかしながら，問題 $\mathrm{P}(\alpha)$ では，$\boldsymbol{d}_{ij(\alpha)}$, $\boldsymbol{L}_{(\alpha)}^k$ が普通の数値ではなく区間であるため，その解を求めるには，区間に対する順序関係を決めなければいけない。これに関しては，数理計画法の分野では石渕ら［11］と中原ら［12］が区間係数をもつ数理計画手法を取り上げ，区間の上限値と下限値を同時に考慮した優越関係に基づき非劣解集合を探索する解法を提案された。その中で，区間目的関数の最小(大)化問題を通常の2目的最小(大)化問題に帰着させなければいけない。2目的最小(大)

化問題の解を求めるのが容易ではないから，多目的最適化の困難に直面している。

そこで，本研究では，実用上の便利性から α-レベル集合 $\boldsymbol{d}_{ij(\alpha)}=[d_{Lij}^{(\alpha)}, d_{Rij}^{(\alpha)}]$, $\boldsymbol{L}_{(\alpha)}^{k}=[l_L^{k(\alpha)}, l_R^{k(\alpha)}]$ の上限値と下限値を別々に考慮し，各 α-レベル集合の左端点と右端点に対応して，次の α-レベル問題 PL(α) (Problem at Left endpoint) と PR(α) (Problem at Right endpoint) を生成する。

問題 PL(α)

Minimize $\{l_L^{k(\alpha)};\ k=1, 2, \ldots, p\}$ (15)

Subject to

$$l_L^{k(\alpha)}=\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^{k} d_{Lij}^{(\alpha)} \tag{16}$$

$$\{x_{ij}^{k}\} \Leftrightarrow P_k;\ P_k \in P \tag{17}$$

$$x_{ij}^{k} \in \{0, 1\};\ i, j=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, p$$

問題 PR(α)

Minimize $\{l_R^{k(\alpha)};\ k=1, 2, \ldots, p\}$ (18)

Subject to

$$l_R^{k(\alpha)}=\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^{k} d_{Rij}^{(\alpha)} \tag{19}$$

$$\{x_{ij}^{k}\} \Leftrightarrow P_k;\ P_k \in P \tag{20}$$

$$x_{ij}^{k} \in \{0, 1\};\ i, j=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, p$$

問題 PL(α) と問題 PR(α) は通常の最短路問題であり，これまで提案された最短路解法，たとえ

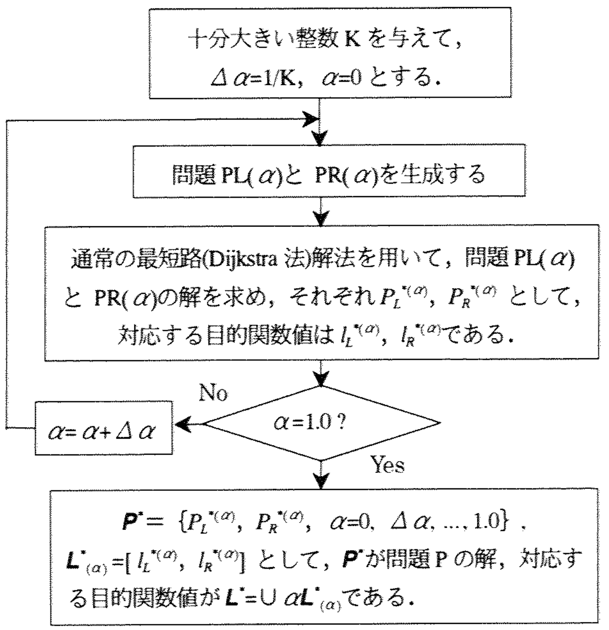

図2. 提 案 解 法

ば Dijkstra 法を用いて，これらの問題の解を容易に得ることができる。問題 PL(α)と問題 PR(α)の解から近似的に問題 P(α)の解を生成してから，さらに分解定理により問題 P の解を求めることができる。

6.3　提案解法

以上の考え方に基づき，問題 PL(α) と問題 PR(α) の解を求めることにより問題 P の解を求める解法を提案し，図 2 に示す。

6.4　数値計算例

(1)　計算例の生成

提案解法を説明するために，図 3 に示す 12 ノードの計算例を生成する。各ノード間の距離は図 4 に示す台形型ファジィ数であり，表 1 に示す。

また，始点 $s=1$，終点 $t=11$ とする。

(2)　α-レベル問題の解法

問題 PL(α) と PR(α) の解を求めるには，Dijkstra 法を用いる。

(3)　最短路

$\Delta\alpha=0.1$ (あるいは K=10) として，図 3 の計算例に提案解法を適用し，各々の α-レベル問題 PL (α) と PR(α) の解を求めて，その結果を表 2 に示す。各最短路の詳細を表 3 に示す。

これに基づき，$\boldsymbol{P}^*=\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$とすれば，$\boldsymbol{P}^*$ が問題 P の最適解となる。これに対応する目的関数の最適値は $\boldsymbol{L}^*=\cup\alpha\boldsymbol{L}^*_{(\alpha)}$ であり，図 5 に示す。

以上の結果から，次のことが分かった。

(1)　通常の最短路問題と異なり，問題 P の解であるファジィ最短路 $\boldsymbol{P}^*$ は 1 本の路ではなく，4 本

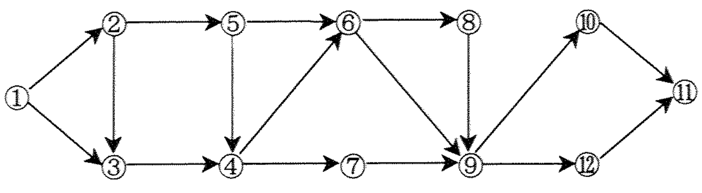

図 3.　12 ノードの計算例

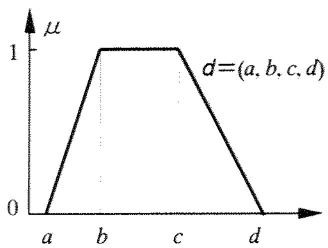

図 4.　台形型ファジィ数

表1. 各 弧 の 距 離

ノード i	ノード j	弧 $i \to j$ の距離 (a, b, c, d)
1	2	(1.94, 2.15, 2.20, 2.26)
1	3	(8.93, 9.01, 9.15, 9.66)
2	3	(9.03, 9.14, 9.56, 10.0)
2	5	(9.75, 9.80, 10.0, 10.0)
3	4	(7.16, 7.16, 7.74, 8.22)
4	6	(2.41, 2.66, 3.71, 3.84)
4	7	(2.30, 3.62, 3.76, 3.84)
5	4	(2.99, 3.00, 3.45, 3.67)
5	6	(9.87, 9.87, 10.0, 10.0)
6	7	(7.21, 7.23, 7.80, 8.10)
6	8	(9.65, 9.67, 9.88, 9.88)
6	9	(7.65, 7.65, 7.65, 8.00)
7	9	(6.12, 8.14, 8.14, 8.22)
8	9	(5.43, 5.66, 5.66, 5.79)
9	10	(3.20, 3.33, 3.56, 3.67)
9	12	(3.20, 3.33, 3.40, 4.11)
10	11	(4.33, 4.54, 4.56, 4.88)
12	11	(4.33, 4.44, 4.45, 5.12)

表2. α-レベル問題の解

α	PL(α) の解		PR(α) の解	
	最短距離 $l_L^{*(\alpha)}$	最短路 $P_L^{*(\alpha)}$	最短距離 $l_R^{*(\alpha)}$	最短路 $P_R^{*(\alpha)}$
0	30.63	P_1	36.32	P_4
0.1	31.02	P_2	36.20	P_4
0.2	31.40	P_2	36.08	P_4
0.3	31.79	P_2	35.96	P_4
0.4	32.17	P_2	35.84	P_4
0.5	32.56	P_2	35.73	P_4
0.6	32.73	P_3	35.61	P_4
0.7	32.80	P_3	35.49	P_4
0.8	32.88	P_3	35.29	P_3
0.9	32.95	P_3	35.07	P_3
1	33.03	P_3	34.86	P_3

の非劣路 P_1, P_2, P_3, P_4 からなる路の集合である。

(2) 与えられた α-レベルの値に応じて，異なる最短路を得られた。つまり，α の値により最短路が異なるため，弧の距離がファジィ数であるとき，すべての場合において距離が必ず最短である唯一な路は一般に存在しない。

(3) 以上の例では，弧の距離が台形型ファジィ数でありながら，α の値により最短路が異なるため，目的関数の最適値は台形型ファジィ数に近いけれど，厳密な台形型ファジィ数とならない。

(4) 弧の距離が台形型以外のファジィ数である場合，与えられた α-レベルにおいて，問題 P より

表3.　最短路の詳細

No	最　短　路
P_1	①→②→⑤→④→⑦→⑨→⑩→⑪
P_2	①→②→⑤→④→⑦→⑨→⑫→⑪
P_3	①→②→⑤→④→⑥→⑨→⑫→⑪
P_4	①→②→⑤→④→⑥→⑨→⑩→⑪

図5.　最短路 L^*

PL(α) と PR(α) を生成する計算だけが異なり，それ以外は一切変わらないので，提案解法は相変わらず適用できる。

(5)　本研究では α-レベルを変えながら α-レベル問題 PL(α) と PR(α) の解を求めることにより，元の最短路問題 P の解を求める解法を提案した。この中で，$\Delta\alpha$ の値の設定は計算効率と提案解法の有効性に大きく影響を与える。$\Delta\alpha$ の値を大きく設定すれば α-レベル問題の数が減り，計算効率は高くなる反面，非劣路を見失う恐れがある。逆に $\Delta\alpha$ の値を小さく設定すれば α-レベル問題の数が増えて，あいまいさの爆発が起こり計算効率は悪くなる。

上記の計算例では，$\Delta\alpha=0.1$ として，PL(0.1)～PL(0.5)，PL(0.6)～PL(1.0)，PR(0.0)～PR(0.7)，PR(0.8)～PR(1.0) を解いて同じ解を得られた。同時に PL(0.0)，PL(0.1) の解がそれぞれ異なった。さらに，$\Delta\alpha=0.05, \alpha=0.00, 0.05, \cdots, 1.00$ として PL(α)，PR(α) の解を求めて，新しい非劣路を得られなかった。他の複数の計算例についても調べて同じ結果が得られた。このため，$\Delta\alpha=0.1$ (K=10) が適当な設定値であると考える。

7.　解の評価と選択

7.1　解の評価と選択の必要性

従来のクリスプな最短路解法と異なり，提案したファジィ最短路解法を適用すれば，得られた解

は1本の路ではなく，複数本の非劣路の集合である。これは人間の主観判断のあいまいさを表わすファジィ数を問題に導入することによって生じたものであり，意思決定者には唯一な答えではなく，複数の選択肢を与えることができるところに，ファジィ最短路解法の特色が見える。

しかしながら，実際に最短路選択や輸送計画を行う場合，複数本の非劣路の中から1本だけの路を選んで，管理指示として実行しなければならないため，この最終解の選択方法についても検討する必要がある。もちろん，この選択は意思決定者により行われることになるが，意思決定者はこの選択を行うには必ず選択の根拠となる手法または手順を必要としなければならない。

7.2 評価選択方法の提案

(1) 基本考え方

上述したファジィ最短路解法では，最適解として複数本の非劣路を得られた。各々の非劣路は与えられた特定の α-レベルにおける最適解であり，この特定の解をすべての α-レベルにわたって適用する場合，最適解とはならなくて，全体の最適解の目的関数値 $\boldsymbol{L}^*$ に比べて，差異が生じる。また，最適解の目的関数値 $\boldsymbol{L}^*$ に対する目的関数値の差異は，一定の値ではなく，各々の非劣路により異なる。この差異を評価することにより，最終解を選択するための手順を提案することができる。

(2) 解の評価選択方法

上述した考え方に基づき，ここでは，解の評価選択手順を次のとおり提案する。

【解の評価選択手順】

［ステップ1］ 上述の6.3節に提案した解法を適用し，得られた問題Pの解が h 本の非劣路からなり，$\boldsymbol{P}^*=\{P_1, P_2, \ldots, P_h\}$ とする。$\boldsymbol{P}^*$ に対応する目的関数値が $\boldsymbol{L}^*$ である。

［ステップ2］ $\{x_{ij}^k\}\Leftrightarrow P_k(P_k\in\boldsymbol{P}^*,\ k=1, 2, \ldots, h)$ を問題Pに代入し，対応する目的関数値を計算し，$\boldsymbol{L}^k$ とする。

［ステップ3］ $\Delta\boldsymbol{L}^k=\boldsymbol{L}^k-\boldsymbol{L}^*, k=1, 2, \ldots, h$ を計算する。

［ステップ4］ $\boldsymbol{L}^*, \boldsymbol{L}^k, \Delta\boldsymbol{L}^k$ がファジィ数であるため，最終解として次式（21）を満足する路 P_q を選択する。

$$\Delta\boldsymbol{L}^q=\text{Fuzzy Min}\,\{\Delta\boldsymbol{L}^k,\ k=1, 2, \ldots, h\} \tag{21}$$

式(21)では，$\Delta\boldsymbol{L}^k$ がファジィ数であるため，ファジィ最小となっている。ここでは，あいまいな選択ではなく，複数本の非劣路から明確に1本だけを選ぶ必要があるから，意思決定者の判断で適切なファジィ数ランキング基準を導入することを必要とする。これについては，次のように提案する。

(1) 一般化期待値GMVと広がり（平均偏差）をともにランキング基準として，
$\text{Min}\,\{\text{GMV}(\Delta\boldsymbol{L}^k),\ k=1, 2, \ldots, h\}\quad\cap\quad\text{Min}\,\{s(\Delta\boldsymbol{L}^k),\ k=1, 2, \ldots, h\}$
を満足する路 P_q を選択することができる。

(2) 一般化期待値GMVだけをランキング基準とすれば，
$\text{Min}\,\{\text{GMV}(\Delta\boldsymbol{L}^k),\ k=1, 2, \ldots, h\}$
を満足する路 P_q を選択することができる。これは平均的にファジィ最短路にもっとも近い路

である。

(3)　広がり（平均偏差）$s(\varDelta \boldsymbol{L}^k)$ だけをランキング基準とすれば，
$\text{Min}\,\{s(\varDelta \boldsymbol{L}^k),\ k=1,2,\ldots,h\}$
を満足する路 P_q を選択することができる。これはファジィ最短路との差のバラツキが最も小さい路である。

(4)　一般化期待値と広がり（平均偏差）以外には，いろいろな観点から $\varDelta \boldsymbol{L}$ を評価することができる。たとえば，楽観的観点から $\varDelta \boldsymbol{L}$ の最小値が一番小さい路，悲観的観点から $\varDelta \boldsymbol{L}$ の最大値が一番小さい路を選ぶことができる。

7.3　解の評価と選択の例

上述の計算例では，最短路の目的関数値 $\boldsymbol{L}^*$ は近似的に台形型ファジィ数で表わされ，

$$\boldsymbol{L}^* \fallingdotseq (30.63,\ 33.03,\ 34.86,\ 36.32)$$

となる。

$\{x_{ij}^k\} \Leftrightarrow P_k\,(P_k \in \boldsymbol{P}^*,\ k=1,2,3,4)$ をそれぞれ問題Pに代入し，対応する目的関数値を計算し，

$$\boldsymbol{L}^1 = (30.63,\ 34.58,\ 35.67,\ 36.54)$$
$$\boldsymbol{L}^2 = (30.63,\ 34.48,\ 35.40,\ 37.22)$$
$$\boldsymbol{L}^3 = (32.27,\ 33.03,\ 34.86,\ 37.00)$$
$$\boldsymbol{L}^4 = (32.27,\ 33.13,\ 35.13,\ 36.32)$$

となる。これらを図6に示す。

また，最適値 $\boldsymbol{L}^*$ に対する $\boldsymbol{L}^k$ の差異を計算し，

$$\varDelta \boldsymbol{L}^1 = (-5.69,\ -0.28,\ 2.64,\ 5.91)$$
$$\varDelta \boldsymbol{L}^2 = (-5.69,\ -0.38,\ 2.37,\ 6.59)$$
$$\varDelta \boldsymbol{L}^3 = (-4.05,\ -1.83,\ 1.83,\ 6.37)$$
$$\varDelta \boldsymbol{L}^4 = (-4.05,\ -1.73,\ 2.10,\ 5.69)$$

となる。これらを図7に示す。

$\varDelta \boldsymbol{L}^k$ の一般化期待値GMVと広がり（平均偏差）を計算し，

$$\text{GMV}(\varDelta \boldsymbol{L}^1) = 0.538 \qquad s(\varDelta \boldsymbol{L}^1) = 2.459$$
$$\text{GMV}(\varDelta \boldsymbol{L}^2) = 0.665 \qquad s(\varDelta \boldsymbol{L}^2) = 2.573$$
$$\text{GMV}(\varDelta \boldsymbol{L}^3) = 0.673 \qquad s(\varDelta \boldsymbol{L}^3) = 2.277$$
$$\text{GMV}(\varDelta \boldsymbol{L}^4) = 0.549 \qquad s(\varDelta \boldsymbol{L}^4) = 2.144$$

となる。これにより

(1)　一般化期待値GMVと広がり（平均偏差）がともに最小である非劣解は存在しない。

(2)　$\varDelta \boldsymbol{L}^k$ の評価に一般化期待値GMVだけを適用する場合，$\text{GMV}(\varDelta \boldsymbol{L}^1)$ が最小であるため，最終解としてGMVの一番小さい P_1 を選択する。P_4 は第2候補解とすることができる。

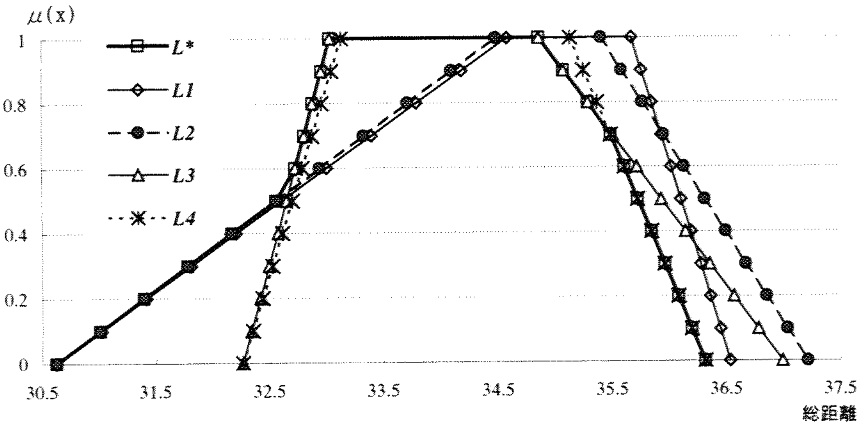

図 6. 最短路の評価

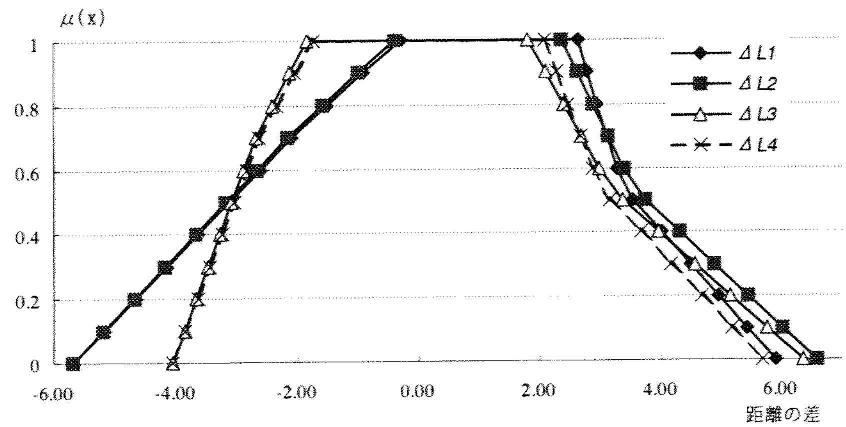

図 7. 最短路の評価

(3) ΔL^k の評価に広がり（平均偏差）だけを適用する場合，$s(\Delta L^4)$ が最小であるため，最終解として広がり（平均偏差）の一番小さい P_4 を選択する。

この例より，提案した解の評価選択方法を適用するに際して，意思決定者がまず適切なファジィ数ランキング基準を決める必要がある。決められたランキング基準により得られた最終解が異なる。これを通じて意思決定者の主観判断を意思決定過程に反映させることができる。もちろん，単純なファジィ数ランキング基準に頼るだけでなく，他の選択基準や定式化できない制約条件を考慮しながら最終解の選択を行うこともできる。

8. 終わりに

本研究ではファジィ距離を持つファジィ最短路問題を検討して，得られた成果を要約すれば，次

のとおりである。

(1) レベルの異なる α-レベル問題を解くことにより，複数本の非劣路を与えるファジィ最短路解法を提案した。

(2) 数値計算例を用いて，提案したファジィ最短路解法の特色を明らかにした。

(3) ファジィ最短路を求めた結果として得られた複数本の非劣路集合から最終解を選択する手順を提案し，計算例によりその有効性を示した。

参 考 文 献

[1] 伊理正夫，等：*グラフ・ネットワーク・マトロイド*，産業図書株式会社，pp. 31-37 (1986).

[2] 加藤誠巳："経路探索問題とその応用"，*情報処理*，Vol. 39, No. 6, pp. 552-557 (1998).

[3] 劉錫会 原著，董彦文，厳紹寅，北岡正敏 共訳：*ファジィネットワーク工学*，日本理工出版会，pp. 141-176 (1995).

[4] 中村塁，董彦文，北岡正敏，奥村博造："ファジィ最短路を用いた輸配送計画における経路問題に関する研究"，*日本経営数学会誌*，Vol. 18, pp. 57-69 (1996).

[5] Okada, S., Gen, M.: "Fuzzy Shortest Path Problem", *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 27, Nos. 1-4, pp. 465-468 (1994).

[6] 伊藤健，石井博昭："可能性測度によるファジィ最短経路問題の一モデル"，*日本ファジィ学会誌*，Vol. 8, No. 6, pp. 1116-1124 (1996).

[7] Kaufmann, A. and Gupta, M.M. 原著，田中英夫監訳・松岡浩訳：*ファジィ数理と応用*，オーム社，pp. 40-41 (1992).

[8] Bortolan, V. and Degani, R.: "A Review of Some Methods for Ranking Fuzzy Numbers", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 15, pp. 1-15 (1985).

[9] Lee, E.S. & Li, R.J.: "Comparison of Fuzzy Numbers Based on The Probability Measure of Fuzzy Events", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 15, pp. 887-896 (1988).

[10] 坂和正敏：*ファジィ理論の基礎と応用*，森北出版，pp. 11-18 (1989).

[11] 石渕久生，田中英夫："区間係数をもつ線形計画問題の定式化とその解析"，*日本経営工学会誌*，Vol. 40, No. 5, pp. 320-329 (1989).

[12] 中原陽三，玄光男，井田憲一："区間係数を伴う混合整数計画問題の並列アルゴリズムとそのUNIXネットワーク上での実現"，*日本経営工学会誌*，Vol. 44, No. 2, pp. 116-123 (1993).