商学論集　第73巻第1号　　2004年9月

【論　文】

為替相場における投機的バブルの期待安定性

熊　本　尚　雄[†]，熊　本　方　雄[‡]

1. はじめに

内生変数の将来の値が現在の変数に影響を与えるマクロ経済モデルにおいては，合理的期待均衡として複数均衡が発生することが知られている。資産価格決定モデルがその例である。これらのモデルにおいては，現在の資産価格は現在のファンダメンタルズと将来の資産価格の期待値に依存して決定され，資産価格決定式は1階の差分方程式として与えられる。この場合，資産価格の一般解(general solution) は，非同次解 (non-homogeneous solution) と同次解 (homogeneous solution) の和として与えられる。資産価格決定モデルにおいては，この非同次解はファンダメンタルズ値，同次解は投機的バブル解と呼ばれる[1)]。投機的バブル解の経路はその初期値の値に応じて無数に存在するため，これは資産価格の経路が無数に存在し得ることを意味する。

本稿で分析する為替相場決定モデルもこの資産価格決定モデルの一つである。為替相場も非同次解であるファンダメンタルズ値と，同次解である投機的バブル解の和として表される。後述する通り，為替相場における投機的バブル解のうち，為替相場がゼロに収束し，自国通貨の価値が無限大となるような負の投機的バブル解は，経済主体の合理性と非整合的であるため排除可能である。しかしながら，為替相場が無限大に発散し，自国通貨の価値がゼロとなるような正の投機的バブル解は，経済主体の合理性によっても排除できない。このことは為替相場の均衡経路が一意に定まらないことを意味している。

これに関し，近年，マクロ経済学においては，限定合理的 (bounded rational) な経済主体の学習過程により，個々の均衡解が安定的であるかどうかを分析することにより，複数解のうち実現し得る解を選別するという研究が行われ始めている[2)3)]。

限定合理性の概念は，Simon (1955) によるもので，そこでは，限定合理的な行動とは，「意図的には合理的であるが，その合理性には限界がある」行動であると定義される。この限定合理性の概念をマクロ経済学に導入するとき，通常，新古典派マクロ経済学において前提とされてきた合理性

† 福島大学経済学部，e-mail : kumamoto@econ.fukushima-u.ac.jp
‡ 東京経済大学経済学部，e-mail : kumamoto@tku.ac.jp

1) 資産価格における投機的バブルについては，Blanchard (1979), Blanchard and Watson (1982) を参照のこと。

2) マクロ経済学における限定合理性については，Sargent (1994), Evans and Honkapohja (2001), Honkapohja (1995) を参照のこと。

3) Evans (1985, 1986), Evans and Honkapohja (1994) を参照のこと。

の仮定を緩めたものとして定式化される。具体的には，経済主体の合理性において仮定されていた「目的合理性」（経済主体は何らかの目的を達成するために，利用可能なすべての情報を用いて合目的的に最適化行動を行う）と「期待合理性」（経済主体はモデルの構造，さらにパラメータについての知識も有しており，確率変数の数学的期待値と自身の主観的期待値とを等しくするように行動する）という二つの仮定のうち，目的合理性の仮定は保持するが，期待合理性の仮定を外すものとして定式化される[4]。換言するならば，経済主体は何らかの目的を達成するために意識的に努力するが，それは認知能力や計算能力の限界を反映したやり方でなされるということである。

経済主体は短期的な行動の選択にあたってモデルを構築し，そのモデルの枠内で合目的的に最適な行動を選択するが，そのモデルは認知能力や計算能力の限界を反映して，真のモデルの単純化か，または間違った特定化である。そして，長期的には自身の経験から情報を集め，適合的学習過程を通じて，この短期のモデルを更新していくのである。ここで問題となるのは，限定合理的な経済主体の学習過程の極限として，合理的期待均衡が達成されるのか，または達成されるのであれば，その収束条件は何かということである。個々の合理的期待均衡解において，この収束条件が満たされているかどうか，すなわち安定性の条件を満たしているかどうかを分析することにより，複数均衡を選別する基準とすることができるのである。

本稿の目的は，為替相場における正の投機的バブル解が，限定合理的な経済主体の学習過程によって安定的であるかどうかを分析することである。限定合理的な学習過程の定式化には複数の定式化が想定できようが，本稿では，DeCanino (1979)，Evans (1985, 1986, 1989) によって定式化された逐次的学習過程を用い，そこで定義される期待安定性 (expectational stability) の概念により，正の投機的バブルの安定性を分析する。

本稿における分析は，経済学的にも意義があると考えられる。すなわち，従来の分析は，経済主体が相互に整合的な信念に基づいて個々の決定を行っているときに達成される集約的な結果を考察するものにすぎなかったのに対し，学習過程の分析は，経済構造を十分に認知できない経済主体が存在するときに，個々の経済主体の学習行動が情報の収集と伝播を通し，いかに個々の経済主体の信念を協調させ，いかなる経済的な帰結をもたらすかということを考察するものであるからである。

本稿の構成は，以下の通りである。第2節においては，money-in-the-utility-model に基づき，為替相場決定式を導出し，為替相場における負の投機的バブル解は排除可能であることを示す。第3節では，為替相場における正の投機的バブル解が，限定合理的な経済主体の学習過程によって安定的であるかどうかを分析し，正の投機的バブル解は期待安定性の条件を満たさないことを示す。第4節は，結論である。尚，補論において，これまで研究されてきたいくつかの代表的な学習過程とその収束条件をサーヴェイし，これらの相互関係を明らかにする。

2.　為替相場における投機的バブル解

本節では Brock (1974, 1975) の money-in-the-utility-model を開放経済に拡張し，為替相場決

4)　以上の定義に従えば，非合理的な経済主体とは目的合理性も期待合理性も有さない経済主体であると定義されよう。

定式を導出し，為替相場における負の投機的バブル解が，合理的な経済主体の最適化行動と非整合的であるため，排除可能であることを示す。

money-in-the-utility-model においては，個人は貨幣を保有することにより，取引費用を節約することができるので，この流動性サービスから直接効用を得る。これらは分離可能で加法的な効用関数によって表すことができると仮定し，以下のような小国開放経済における代表的個人の最大化問題

$$\max_{C_t, M_t} U_t\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}\right) = \sum_{t=1}^{\infty} E_t\left[\beta^t\left\{u(C_t) + v\left(\frac{M_t}{P_t}\right)\right]\right., \tag{1}$$

$$s.t. \quad P_t B_t + M_t = P_t(1+r_{t-1})B_{t-1} + M_{t-1} + P_t Y_t - P_t C_t, \tag{2}$$

を考える。但し，C_t は実質消費，M_t は名目貨幣残高，P_t は物価水準，Y_t は外生的に与えられる実質所得，B_t は t 期末の実質対外債券残高，r_t はこの債券に対する $t-1$ 期末から t 期末にかけての実質金利である。

また，外国の物価水準を$P_t{}^*$，自国通貨建て為替相場を S_t とし，購買力平価

$$P_t = S_t P_t{}^*, \tag{3}$$

が成立しているものとする。さらに簡単化のため $P_t{}^*=1$ と仮定する。このとき，最大化問題の一階条件は，

$$u'(C_t) = \beta(1+r_t)u'(C_{t+1}), \tag{4}$$

$$\left[u'(C_t) - v'\left(\frac{M_t}{P_t}\right)\right]\frac{1}{P_t} = \beta u'(C_{t+1})\frac{1}{P_{t+1}}, \tag{5}$$

となる。(4)式は実質消費に関する Euler 方程式であり，t 期において 1 単位消費することと，t 期において消費せず対外債券として保有し，これを $t+1$ 期に消費することとが無差別となるための条件である。(5)式は実質貨幣残高に関する Euler 方程式であり，t 期において 1 単位消費することと，t 期において消費せず貨幣として保有し流動性サービスを享受し，これを $t+1$ 期に消費することとが無差別となるための条件である。(4)式より，$\beta(1+r_t)>1$ であれば，無限期間においては消費量は無限大となり，一方 $\beta(1+r_t)<1$ であれば，消費量はゼロに収束してしまうので，常に $\beta(1+r_t)=1$ が成立することがわかる。よって，(4) 式は

$$u'(C_t) = u'(C_{t+1}), \tag{6}$$

となり，消費は通時的に一定となる。このため均衡においては，$C_t = C_{t+1} = \bar{C}$ となる。ここで，マネーサプライは

$$M_t = \mu M_{t-1},\ M_0:\ given, \tag{7}$$

というルールによって外生的に決定されるものとする。このとき，(5) 式は

$$\left[u'(\bar{C}) - v'\left(\frac{M_t}{P_t}\right)\right]\frac{M_t}{P_t} = \frac{\beta}{\mu}u'(\bar{C})\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}}, \tag{8}$$

となる。さらに，$P_t^*=1$ より $P_t = S_t$ を代入すると，

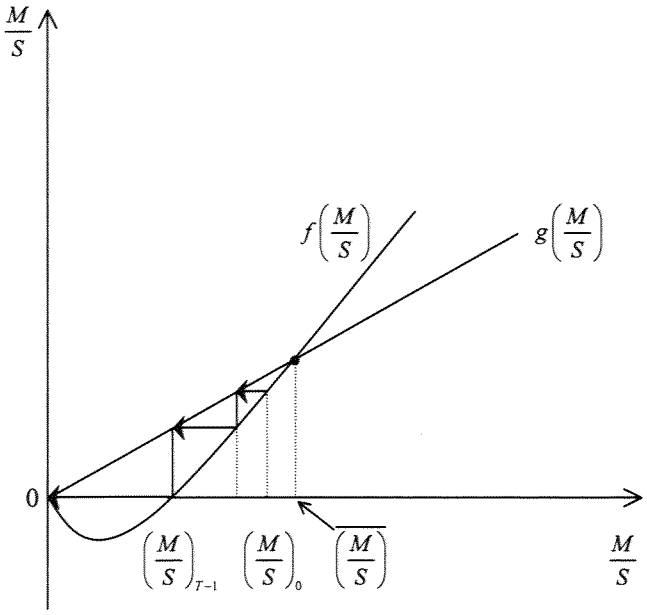

図1.　M_t/S_t の均衡経路

$$\left[u'(\bar{C})-v'\left(\frac{M_t}{S_t}\right)\right]\frac{M_t}{S_t}=\frac{\beta}{\mu}u'(\bar{C})\frac{M_{t+1}}{S_{t+1}}, \tag{9}$$

が得られる。M_t は(7)式によって外生的に決定されるので，M_t/S_t の動きをみることによって，為替相場の動きをみることができる。ここで，

$$f\left(\frac{M}{S}\right)=\left[u'(\bar{C})-v'\left(\frac{M}{S}\right)\right]\frac{M}{S},$$

$$g\left(\frac{M}{S}\right)=\frac{\beta}{\mu}u'(\bar{C})\frac{M}{S},$$

とおく。ここで，$\lim_{M/S\to 0}(M/S)v'(M/S)=0$ と想定する[5]。このとき，$f(M/S)$，および $g(M/S)$ を図示したものが，図1である。

図1より，M_t/S_t の均衡経路として，(a) ゼロに収束，(b) 定常均衡 $(\overline{M/S})$ に収束，(c) 無限大に発散という3つの経路が存在し，定常均衡は不安定であることがわかる。経路 (c) は原点から後ろ向きに推測することにより得ることができる[6]。但し，「－ (upper bar)」は定常状態を表す記号

5)　$\lim_{M/S\to 0}(M/S)v'(M/S)>0$ であるならば，$\lim_{M/S\to 0}v(M/S)=-\infty$ となる。その証明は以下の通りである。いま，$\lim_{M/S\to 0}v(M/S)=a_0$ となる有限の a_0 が存在すると仮定する。このとき，$\lim_{M/S\to 0}(M/S)v'(M/S)>0$ であるならば，すべての $(M/S)<(M_0/S_0)$ に対し，$(M/S)v'(M/S)>c_0$ を満たす c_0，および M_0/P_0 が存在する。一方，$v(\cdot)$ は厳密な凹関数であるため，$M/S<M_0/S_0$ に対し，$v(M/S)-a_0>(M/S)v'(M/S)>c_0$ となる。しかしながら，a_0 が有限であるならば，$(M/S)<(M_0/S_0)$，かつ $v(M/S)-a_0<c_0$ となる十分に小さい M/S が存在する。これは矛盾である。よって，$a_0=\lim_{M/S\to 0}v(M/S)=-\infty$ となる。上記の証明については，Obstfeld and Rogoff (1983, 1986, 1996) を参照のこと。

6)　すなわち，$T-1$ 期において，$u'(C)=v'(M_{T-1}/S_{T-1})$ を満たし，かつ T 期において $S_T=\infty$ となる $T-1$ 期

である。経路(a)は為替相場が無限大に発散し，自国通貨の価値がゼロとなる正の投機的バブル解，経路 (c) は為替相場がゼロに収束し，自国通貨の価値が無限大となる負の投機的バブル解を表している。

これに関し，Brock (1974, 1975) は，負の投機的バブル解である経路 (c) は，経済主体の合理性と非整合的であるため，均衡経路として排除可能であることを示している。

命題 1 (Brock (1974, 1975))：u, v が厳密な凹関数で $M/S \to \infty$ のとき，$v'(M/S) \to 0$, $\mu/\beta \geq 1$ が満たされており，さらに，十分大きな M/S に対して，$v'(M/S) < (M/S)^{\lambda}$ となるような定数 $\lambda < 0$ が存在するならば，経路 (c) は均衡経路となり得ない。M_t/S_t は $f(\overline{M/S}) = g(\overline{M/S})$ を満たす定常値 $(\overline{M/S})$ に収束する。□

証明：$u'(\bar{C})(M_{t+1}/S_{t+1})/(M_t/S_t) = (\mu/\beta)[u'(\bar{C}) - v'(M_t/S_t)]$, $M_t/S_t \to \infty$ のとき $v'(M_t/S_t) \to 0$ なので，$u'(\bar{C})(M_{t+1}/S_{t+1})/(M_t/S_t) \to (\mu/\beta)u'(\bar{C})$ となり，M_t/S_t は率 μ/β で成長する。一方，$S_t = \mu^t M_0/(M_t/S_t)$ より，$S_{t+1}/S_t = (\mu M_t/S_t)/(M_{t+1}/S_{t+1}) = \beta$ なので，為替相場は率 β で減価する。

ある T 期において，貨幣残高 1 単位を消費に回すと，$u'(\bar{C})/S_T$ に等しい追加的な効用を得ることができるが，$t \geq T$ 期にかけて $\sum_{t=T}^{\infty} \beta^{t-T} v'(M_t/S_t)/S_t$ の損失を受ける。しかしながら，S_t は率 β で，M_t/S_t は率 μ/β で成長し，さらに十分大きな M_t/S_t に対して，$v'(M_t/S_t) < (M_t/S_t)^{\lambda}$ であることから，損失の上限は，$k\sum_{t=T}^{\infty}[(\mu/\beta)^{\lambda}]^t/S_T$ で抑えられる。但し，k は定数で $k = (M_{t_0}/S_{t_0})/(\mu/\beta)^{t_0}$, t_0 は $v'(M_t/S_t) < (M_t/S_t)^{\lambda}$ を満たす最初の時刻 t である。ここで，$\mu/\beta > 1, \lambda < 0$ より，$(\mu/\beta)^{\lambda} < 1$ なので，$u'(Y)/S_T > k\sum_{t=T}^{\infty}[(\mu/\beta)^{\lambda}]^t/S_T$ が成立し，個人は実質貨幣残高を保有しようというインセンティブをもたず，この経路は均衡になり得ない[7]。■

上述の通り，為替相場における負の投機的バブル解は排除可能であるが，正の投機的バブル解を

が存在する。$T-1$ 期においては，追加的な 1 単位の消費から得られる限界効用と，追加的な 1 単位の実質貨幣残高の保有から得られる限界効用が等しいため，経済主体は T 期において自国通貨の価値がなくなることを知っているにも関わらず，$T-1$ 期においては，流動性サービスが得られるため貨幣を保有する。

7) Obstfeld and Rogoff (1983, 1986, 1996) は，$v(M/S)$ が上から有界であり，かつ横断性条件 (transversality condition) $\lim_{T\to\infty}\beta^T(1/S_{t+T})u'(\bar{C}) = 0$ が満たされるならば，(c) の経路は均衡になり得ないことを示している。この証明は以下の通りである。

(9) 式より，

$$\frac{M_t}{S_t}u'(\bar{C}) = \sum_{i=0}^{T-1}\beta^i\frac{1}{S_{t+i}}v'\left(\frac{M_{t+i}}{S_{t+i}}\right) + \beta^T\frac{1}{S_{t+T}}u'(\bar{C}),$$

が得られる。また，(c) の経路上では M_t/S_t は率 μ/β で成長するため，$\lim_{T\to\infty}\beta^T(1/S_{t+T})u'(\bar{C}) > 0$ となり，横断性条件を満たさない。このことは，上式より，

$$\frac{1}{S_t}u'(\bar{C}) > \sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\frac{1}{S_{t+i}}v'\left(\frac{M_{t+i}}{S_{t+i}}\right),$$

が成立することを意味し，これは，(c) の経路上においては，消費者は実質貨幣需要を減少させ，消費を増大させることにより，効用を増大させることができることを意味している。よって，経路 (c) は均衡経路となり得ない。

排除することはできない[8]。このことは，為替相場の合理的期待均衡経路が一意に定まらないことを意味している。

3. 限定合理的な経済主体と投機的バブル

本節では，限定合理的な経済主体を想定し，為替相場における正の投機的バブル解が，この限定合理的な経済主体の学習過程によって安定的であるかどうかを分析することにより，正の投機的バブル解は期待安定性の条件を満たさないことを示す。

まず，明示的な為替レート決定式を導出する。これまでの議論では，簡単化のため，完全予見下での最適化問題を考えてきたが，以下では不確実性を導入する。すなわち，前節のモデルにおいては，マネーサプライが(7)式に基づき，また実質所得も外生的に与えられることを想定していたが，これらが確率的に与えられることを想定する。さらに，$P_t^*=1$ という仮定も緩め，モデルをより一般的なものとする。

消費者の効用関数を

$$U_t=E_t\left[\sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{s-t}\left\{\frac{C_s^{1-\rho}}{1-\rho}+\frac{\chi}{1-\varepsilon}\left(\frac{M_s}{P_s}\right)^{1-\varepsilon}\right\}\right], \tag{10}$$

と特定化する。但し，δ は時間選好率，ρ, ε は，それぞれ実質消費量，実質貨幣残高に対する相対的危険回避度，χ は実質貨幣需要に対するウェイトである。また，$E_t[\cdot]$ は t 期の情報集合に基づいた条件付期待値を表すオペレーターである。予算制約式は，前節と同様（2）式で与えられる。

このとき，消費者の1階条件（4）式，および（5）式は，それぞれ

$$C_t^{-\rho}=\frac{1+r_t}{1+\delta}E_t[C_{t+1}^{-\rho}], \tag{11}$$

$$\frac{C_t^{-\rho}}{P_t}=\chi\frac{1}{P_t}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)^{-\varepsilon}+\frac{1}{1+\delta}E_t\left[\frac{C_{t+1}^{-\rho}}{P_{t+1}}\right], \tag{12}$$

となる。

ここで，実質金利を消費に基づいた Fischer 方程式（consumption-based Fischer equation）により，

$$1+r_t=\frac{P_t(1+i_t)E_t\left[\dfrac{C_{t+1}^{-\rho}}{P_{t+1}}\right]}{E_t[C_{t+1}^{-\rho}]}, \tag{13}$$

と定義すると，(11)～(13) 式より，貨幣需要関数

$$\frac{M_t}{P_t}=\left[\chi C_t^{\rho}\left(\frac{1+i_t}{i_t}\right)\right]^{\frac{1}{\varepsilon}}, \tag{14}$$

8) Brock (1974, 1975) は，$v'(0)=+\infty$ を想定するならば，経路（a）においては，個人は消費をわずかだけ減らし，貨幣残高を保有することで，より大きな効用を得ることができるので均衡にはなり得ないとしている。また，Obstfeld and Rogoff (1983, 1986) は，政府が自国通貨の価値が下限に達したときには，兌換する制度（hybrid fiat currency system）を保証することにより，経路（a）を排除できるとしている。

が得られる。但し，i_t は名目金利である。(14)式より，貨幣需要は名目金利の減少関数，実質消費の増加関数となる。

ここで，この経済における定常状態を実質消費，インフレ率が一定となる状態であると定義する。このとき（11）式より，定常状態においては，

$$\bar{r}=\delta, \tag{15}$$

が成立する。さらに，$Cov(\bar{C}^{-\rho}, \bar{P}_{t+1})=0$ であるから，（13）式より

$$1+\bar{r}=(1+\bar{i})\frac{\bar{P}_t}{\bar{P}_{t+1}}, \tag{16}$$

が成立し，定常状態においては名目金利も一定となる。よって，（14）式は

$$\frac{\bar{M}_t}{\bar{P}_t}=\left[\chi\bar{C}^{\rho}\left(\frac{1+\bar{i}}{\bar{i}}\right)\right]^{\frac{1}{\varepsilon}}, \tag{17}$$

となり，定常状態においては，名目マネーサプライの増加は同率の物価水準の上昇をもたらし，実質消費には影響を与えないことがわかる。

以上のモデルに基づき，為替相場決定式を導出する。まず，実質消費は対数正規分布に従うと仮定し，（11）式の両辺の対数をとると，

$$-\rho c_t=r_t+\log\left(\frac{1}{1+\delta}\right)-\rho E_t[c_{t+1}]+\frac{\rho^2}{2}\sigma^2_{c,t}, \tag{18}$$

となる。但し，$\sigma^2_{c,t}\equiv Var_t[c_{t+1}]$, $Var_t[\cdot]$ は t 期の情報集合に基づいた条件付分散を表すオペレーター，小文字（lower-case letters）は対数値を表す。次に，（14）式を

$$1-\frac{\chi P_t C_t^{\rho}}{M_t}=\frac{1}{1+\delta}E_t\left[\frac{P_t}{P_{t+1}}\left(\frac{C_t^{\rho}}{C_{t+1}^{\rho}}\right)\right], \tag{19}$$

と書き直す。(19)式の左辺は対数線形ではないため，これを対数線形近似し，一方右辺については対数線形であるため，これの対数をとると，

$$\bar{i}\varepsilon(m_t-p_t)-\bar{i}\rho c_t-\log(1+\bar{i})=\log\left(\frac{1}{1+\delta}\right)+p_t+\rho c_t-E_t[p_{t+1}]$$
$$-\rho E_t[c_{t+1}]+\frac{\rho^2}{2}\sigma^2{}_{c,t}+\frac{1}{2}\sigma^2{}_{p,t}+\rho\sigma^2{}_{cp,t}, \tag{20}$$

となる[9]。但し，$\sigma^2_{p,t}\equiv Var_t[p_{t+1}]$, $\sigma_{cp,t}\equiv Cov_t[c_{t+1}, p_{t+1}]$, $Cov_t[\cdot]$ は t 期の情報集合に基づいた条件付共分散を表すオペレーターである。(18)，(20) 式より，

$$p_t=\frac{1}{1+\bar{i}\varepsilon}[\bar{i}\varepsilon m_t-\bar{i}\rho c_t-r_t+\psi_t-\log(1+\bar{i})], \tag{21}$$

9) (19) 式の左辺の対数値をとり，これを定常状態の近傍において Taylor 展開する。このとき，定常状態における関係式(11)式，$1-(\chi\bar{P}_t^{\varepsilon}\bar{C}_t^{\rho}/\bar{M}_t^{\varepsilon})=1-\{\bar{i}/(1+\bar{i})\}=1/(1+\bar{i})$ を用いると，$\log(1-\chi P_t^{\varepsilon}C_t^{\rho}/M_t^{\varepsilon})=-\log(1+\bar{i})+\bar{i}\varepsilon((M_t-\bar{M}_t)/\bar{M}_t)-\bar{i}\varepsilon((P_t-\bar{P}_t)/\bar{P}_t)=\bar{i}\rho((C_t-\bar{C}_t)/\bar{C}_t)$ が得られる。ここで，定常状態からの変数 X_t の変化分，$dX_t/\bar{X}_t\equiv(X_t-\bar{X}_t)/\bar{X}_t$ を対数値 x_t で近似するならば，(20) 式が得られる。

が得られる。但し，$\psi_t \equiv -(1/2)\sigma^2_{p,t} - \rho\sigma_{cp,t}$ である。同様の式は，以下の (22) 式のように対称的な外国についても成立している。

$$p_t{}^* = \frac{1}{1+\bar{i}^*\varepsilon}\left[\bar{i}^*\varepsilon m_t{}^* - \bar{i}^*\rho c_t{}^* - r_t{}^* + \psi_t^* - \log(1+\bar{i}^*)\right]. \tag{22}$$

但し，「＊(asterisk)」は外国を示す記号である。ここで定常状態においては，自国と外国のインフレ率が等しいと仮定する。このとき，(16) 式より

$$\bar{i} = \bar{i}^*, \tag{23}$$

が成立し，定常状態においては，自国と外国の名目金利が等しくなることがわかる。ここで，(21) 式から (22) 式を減じたものに，(23) 式と購買力平価式

$$s_t = p_t - p_t{}^*, \tag{24}$$

を用いると，為替相場決定式

$$s_t = \frac{\bar{i}\varepsilon}{1+\bar{i}\varepsilon}(m_t - m_t{}^*) - \frac{\bar{i}\rho}{1+\bar{i}\varepsilon}(c_t - c_t{}^*) - \frac{1}{1+\bar{i}\varepsilon}(r_t - r_t{}^*) + \frac{1}{1+\bar{i}\varepsilon}rp_t + \frac{1}{1+\bar{i}\varepsilon}E_t[s_{t+1}], \tag{25}$$

が得られる。但し，$rp_t \equiv \psi_t - \psi_t^*$ であり，リスクプレミアムを表す。(25) 式より，t 期の為替相場はマネーサプライ，実質消費量，実質金利，リスクプレミアムによって決定されるファンダメンタルズと $t+1$ 期における為替相場の期待値によって決定されることがわかる。

ここで，為替相場を決定するファンダメンタルズ値を

$$z_t \equiv \bar{i}\varepsilon(m_t - m_t{}^*) - \bar{i}\rho(c_t - c_t{}^*) - (r_t - r_t{}^*) + rp_t,$$

および，$\lambda \equiv 1/(1+\bar{i}\varepsilon)$ と定義するならば，(25) 式は

$$s_t = z_t + \lambda E_t[s_{t+1}], \tag{26}$$

と表すことができる。為替相場を決定する差分方程式 (26) 式の一般解は，

$$s_t = s_t^f + b_t, \tag{27}$$

で与えられる。但し，s_t^f は差分方程式 (26) 式の非同次解であり，

$$s_t^f = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i E_t[z_{t+i-1}], \tag{28}$$

で与えられる。これは為替相場のファンダメンタルズ値である。一方，b_t は同次解であり，

$$b_t = \lambda E_t[b_{t+1}], \tag{29}$$

を満たす。これは為替相場の投機的バブル解を表している[10)]。(29) 式を満たす b_t は初期値 b_0 に依

10) まず，(26)式における非同次解を導出する。式を $L^{-1}X_t = E_t[X_{t+1}]$ となるリードオペレーター(lead operator) L^{-1} を用いて，$(1-\lambda L^{-1})s_t = z_t$ と表す。よって，$s_t = 1/(1-\lambda L^{-1})z_t$ となる。ここで，無限等比級数の和の公式より，$1/(1-\lambda L^{-1}) = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i L^{-i}$ となることを用いるならば，$s_t = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i L^{-i} z_t = z_t + \lambda L^{-1}z_t + \lambda^2 L^{-2}z_t + \cdots = z_t + \lambda E_t[z_{t+1}] + \lambda^2 E_t[z_{t+2}] + \cdots$ となるため，非同次解(28)式を得る。次に，同次解を導出する。いま，b_0 を任意の定数とする。このとき，任意の解 $s_t = s_t^f + b_0\lambda^{-t}$ も $s_t^f + b_0\lambda^{-t} = z_t + \lambda E_t[s_{t+1}^f + b_0\lambda^{-(t+1)}]$ となることから，(27) 式を満たすことがわかる。よって，(29) 式を満たす b_t は (26) 式の同次解となる。

存して無数の経路をとり得るので，為替相場の均衡経路が一意に定まらないことを意味している。

ここで，まず限定合理的な経済主体を想定し，ファンダメンタルズ値の期待安定性について分析する[11]。

為替相場を決定するファンダメンタルズ z_t が，以下の AR(1) 過程[12]

$$z_t = \alpha z_{t-1} + \xi_t, \tag{30}$$

に従うものと想定する。但し，ξ_t は期待値ゼロ，分散 σ^2 となる独立同一分布（i.i.d）に従うホワイトノイズ撹乱項である。このとき，為替相場のファンダメンタルズ値（28）式は，

$$\begin{aligned} s_t^f &= (1-\alpha\lambda)^{-1} z_t + \xi_t \\ &= \alpha(1-\alpha\lambda)^{-1} z_{t-1} + \{1+(1-\alpha\lambda)^{-1}\}\xi_t, \end{aligned} \tag{31}$$

と表すことができる。

ここで，限定合理的な経済主体は，為替相場を知覚された運動法則（perceived law of motion）

$$s_t = \beta_{1t-1} z_{t-1} + \beta_{2t-1}\xi_t + \beta_{3t-1}\eta_t, \tag{32}$$

に基づき予測しているものと想定する。これは，限定合理的な経済主体は，為替相場は z_t, ξ_t, および η_t によって決まるとわかって(知覚して)いるが，そのパラメータの値については未知であり，そのパラメータを学習過程に基づき逐次的に更新していくことを意味する。このとき，

$$\begin{aligned} E_t[s_{t+1}] &= \beta_{1t} z_t \\ &= \beta_{1t}\{\alpha z_{t-1} + \xi_t\} = \alpha\beta_{1t} z_{t-1} + \beta_{1t}\xi_t, \end{aligned}$$

となることから，(26) 式より，実際の運動法則（actual law of motion）は，

$$\begin{aligned} s_t &= z_t + \lambda(\alpha\beta_{1t} z_{t-1} + \beta_{1t}\xi_t) \\ &= \alpha z_{t-1} + \xi_t + \lambda(\alpha\beta_{1t} z_{t-1} + \beta_{1t}\xi_t) \\ &= \alpha(1+\beta_{1t}\lambda) z_{t-1} + (1+\beta_{1t}\lambda)\xi_t, \end{aligned} \tag{33}$$

と求まる。よって，知覚された運動法則から実際の運動法則への写像，

$$C(\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}) = (\alpha(1+\beta_{1t}\lambda), 1+\beta_{1t}\lambda, 0), \tag{34}$$

が求まる。このとき，以下の命題を得る。

命題 2：$\alpha\lambda < 1$ であるならば，ファンダメンタルズ値 s^f は期待安定的である。□

証明：ファンダメンタルズ値 s^f が期待安定的であるためには，知覚された運動法則から実際の運動法則への写像 $C(\cdot)$ の Jacobian を s^f で評価したときのすべての固有根の実部が 1 以下であること

11）以下で用いる学習過程については補論を参照のこと。

12）通常，自己回帰（autoregressive：AR）(p) モデルは以下のように与えられる。

$$y_1 = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$

但し，$\mu, \phi_1, \phi_2, \cdots \phi_p$ はパラメータ（定数），u_t は撹乱項である。

が必要条件となる。Jacobian は，

$$DC=\begin{bmatrix}\alpha\lambda & 0 & 0\\ \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{\substack{\beta_1=(1-\alpha\lambda)^{-1}\\ \beta_2=1+(1-\alpha\lambda)^{-1}\\ \beta_3=0}},$$

となり，固有根は $1, \alpha\lambda$ となる。よって，$\alpha\lambda<1$ のとき，ファンダメンタルズ値 s^f は期待安定的となる。■

同様の結論は，Marcet and Sargent（1989a）により提示された最小二乗学習過程を用いた場合にも得られる。実際の運動法則が（33）式で与えられているため，補論における（A-19）式は，

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\beta_1\\ R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R^{-1}M_z[(\lambda\alpha-1)\beta_1+\alpha]\\ M_z-R\end{bmatrix}, \tag{35}$$

となる。このとき，以下の命題を得る。

命題3：$\alpha\lambda<1$ であるならば，確率1で $\beta_{1t}\to\beta_1{}^f$ となる。但し，$\beta_1{}^f$ は $\beta_1{}^f=\alpha/1-\lambda\alpha$ で表される定常状態である。□

証明：（35）式は，補論における命題A-2（（A-7）式）において，$y_t=s_t, x_t=z_t, v_t=\eta_t, A(\beta)=(\lambda\beta_1+1)\alpha, B(\beta)=[0, \alpha], C(\beta)=\lambda\beta_1+1, D(\beta)=1$ とおいたものである。以下では，これらが補論の命題A-2における条件（A-2-1）～（A-2-3）を満たすことを示す。

（A-2-1）　ξ_t はホワイトノイズであるから，i.i.d. に従い，すべての $p<1$ に対して $E|\xi_t|^p<\infty$ が存在する。

（A-2-2）　A, B, C, D の定義より，A は2階微分可能，B, C, D は1階微分可能である。

（A-2-3）　D_1 の境界 δD_1 における（35）式の解軌道が D_1 の内側に向いていることを示す。$\beta_1>\beta_1{}^f=\alpha/1-\lambda\alpha$ を満たす β_1 については，$d\beta_1=R^{-1}M_z[(\lambda\alpha-1)\beta_1+\alpha]<0$ であり，逆に，$\beta_1<\beta_1{}^f$ を満たす β_1 については $d\beta_1>0$ となる。よって D_1 として，$|\beta_1|<K, \beta_1{}^f\in D_1$ を選ぶならば，その境界 δD_1 である $|\beta_1|=K$ においては，(35)式の解軌道は D_1 の内側に向いている。■

次に，投機的バブル解の期待安定性について分析する。先述の通り，投機的バブル解は(27)～(29)式によって表されるため，

$$s_{t-1}=s^f_{t-1}+b_{t-1}=s^f_{t-1}+\lambda^{-1}b_t, \tag{36}$$

が成立する。（27）式と（36）式より，為替相場の一般解は

$$s_t=\lambda^{-1}s_{t-1}+s^f_t-\lambda^{-1}s^f_{t-1}, \tag{37}$$

と表すことができる。また，為替相場のファンダメンタルズ値 s_t^f は(31)式で与えられるため，(37)式は

$$\begin{aligned} s_t &= \lambda^{-1}s_{t-1}+\alpha(1-\alpha\lambda)^{-1}z_{t-1}+\{1+(1-\alpha\lambda)^{-1}\}\xi_t-\lambda^{-1}\{(1-\alpha\lambda)^{-1}z_{t-1}+\eta_{t-1}\} \\ &= \lambda^{-1}s_{t-1}+(1-\alpha\lambda)^{-1}(\alpha-\lambda^{-1})z_{t-1}+\{1+(1-\alpha\lambda)^{-1}\}\xi_t-\lambda^{-1}\eta_{t-1}, \end{aligned} \tag{38}$$

となる。

ここで，限定合理的な投資家は為替相場を以下の知覚された運動法則

$$s_t=\beta_{1t-1}s_{t-1}+\beta_{2t-1}z_{t-1}+\beta_{3t-1}\xi_t+\beta_{4t-1}\xi_{t-1}+\beta_{5t}\eta_t, \tag{39}$$

に基づき，予想しているものと想定する。このとき，

$$\begin{aligned} E_t[s_{t+1}] &= E_t[\beta_{1t}s_t+\beta_{2t}z_t+\beta_{3t}\xi_{t+1}+\beta_{4t}\xi_t+\beta_{5t}\eta_{t+1}] \\ &= E_t[\beta_{1t}s_{t-1}+\beta_{2t-1}z_{t-1}+\beta_{3t-1}\xi_t+\beta_{4t-1}\xi_{t-1}+\eta_t)+\beta_{2t}(\alpha z_{t-1}+\xi_t)\beta_{4t}\xi_t] \\ &= \beta_{1t}^2s_{t-1}+\beta_{2t-1}(\beta_{1t}+\alpha)z_{t-1}+(\beta_{1t}\beta_{3t-1}+\beta_{2t}+\beta_{4t})\xi_t+\beta_{1t}\beta_{4t-1}\xi_{t-1}, \end{aligned} \tag{40}$$

となることから，(26) 式より，実際の運動法則は

$$\begin{aligned} s_t &= z_t+\lambda\{\beta_{1t}^2s_{t-1}+\beta_{2t-1}(\beta_{1t}+\alpha)z_{t-1}+(\beta_{1t}\beta_{3t-1}+\beta_{2t}+\beta_{4t})\xi_t+\beta_{1t}\beta_{4t-1}\xi_{t-1})\} \\ &= \alpha z_{t-1}+v_t+\lambda\{\beta_{1t}^2s_{t-1}+\beta_{2t-1}(\beta_{1t}+\alpha)z_{t-1}+(\beta_{1t}\beta_{3t-1}+\beta_{2t}+\beta_{4t})\xi_t+\beta_{1t}\beta_{4t-1}\xi_{t-1})\} \\ &= \lambda\beta_{1t}^2s_{t-1}+\{\alpha+\lambda\beta_{2t-1}(\beta_{1t}+\alpha)\}z_{t-1}+\{\lambda(\beta_{1t}\beta_{3t-1}+\beta_{2t}+\beta_{4t})+1\}\xi_t+\beta_{1t}\beta_{4t-1}\xi_{t-1}, \end{aligned} \tag{41}$$

と求まる。よって，知覚された運動法則から実際の運動法則への写像は，

$$C(\beta_{1t},\beta_{2t},\beta_{3t},\beta_{4t},\beta_{5t})=(\lambda\beta_{1t}{}^2,\{\alpha+\lambda\beta_{2t-1}(\beta_{1t}+\alpha)\},\{\lambda(\beta_{1t}\beta_{3t-1}+\beta_{2t}+\beta_{4t})+1\},\beta_{1t}\beta_{4t-1},0), \tag{42}$$

となる。このとき，以下の命題を得る。

命題 4：投機的バブル解は期待安定的とならない。□

証明：ファンダメンタルズ値 s^f が期待安定的であるためには，知覚された運動法則から実際の運動法則への写像 $C(\cdot)$ の Jacobian を s^f で評価したときのすべての固有根の実部が 1 以下であることが必要条件となる。Jacobian は

$$DC=\begin{bmatrix} 2\lambda\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\beta_2 & \lambda(\beta_1+\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\beta_3 & \lambda & \lambda\beta_1 & \lambda & 0 \\ \lambda\beta_4 & 0 & 0 & \lambda\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\substack{\beta_1=(1-\alpha\lambda)^{-1} \\ \beta_2=(1-\alpha\lambda)^{-1}(\alpha-\lambda^{-1}) \\ \beta_3=(1+\alpha\lambda)^{-1} \\ \beta_4=\{1+(1-\alpha\lambda)^{-1}\} \\ \beta_5=0}}.$$

となり，実部が 1 を超える固有根が存在することがわかる。よって，投機的バブル解は期待安定性を満たさない。■

命題 3, 4 より，為替相場におけるファンダメンタルズ値は期待安定的であるのに対し，投機的バブル解は期待安定的でないことが示された。このことは，複数存在する為替相場の合理的期待経路

の中で，ファンダメンタルズ解を一意に選択できることを意味している。

4. おわりに

本稿においては，為替相場の合理的期待均衡解は投機的バブル解を含むため，一意に定まらないこと，しかしながら，限定合理的な経済主体による学習過程を考察するならば，ファンダメンタルズ値は期待安定的であるのに対し，投機的バブル解は期待安定的でないこと，すなわち限定合理的な経済主体の学習過程の極限として，投機的バブル解は達成されないことを示した。このことは複数存在する為替相場の合理的期待経路の中で，ファンダメンタルズ解を一意に選択できることを意味している。

但し，本稿においては，代表的な限定合理的な経済主体のみが存在すると仮定し，分析を行ってきた。しかしながら，複数の異質的な限定合理的な経済主体が存在し，その経済主体間で情報の非対称性が存在しているときの学習行動は分析されていない。このような状況下で投機的バブルが存在し得るかどうかは別の問題である。また，投機的バブル以外にも，ファンダメンタルズ値からの乖離原因として，確率的バブル，または定常サンスポット均衡が挙げられることがある[13]。確率的バブル，および定常サンスポット均衡に関しても同様の分析を行うことは興味深い。したがって，以上の分析は今後の課題としたい。

補論．限定合理的な経済主体の学習過程

補論では，限定合理的な経済主体の学習過程の中で，代表的なものをとりあげ，その収束条件を分析する。

まず，確率的近似法（stochastic approximation method）とその収束条件を分析する。次に，最小二乗学習過程（least squares learning）を分析し，これは確率的近似法の1つとして解釈できることをみる。さらに，確率的近似法の収束条件を応用し，最小二乗学習過程の収束条件を導出する。これは学習過程の大域的安定性の条件となる。最後に，本稿で用いた適合的学習過程における期待安定性の概念を分析し，もし合理的期待均衡が期待安定的であるならば，またそのときに限り，最小二乗学習過程は合理的期待均衡に収束することをみる。この収束条件は学習過程の局所的安定性の条件となる。

確率的近似法

Robbins and Monro (1951) によって提示された確率的近似法とその収束条件について分析する。確率的近似法は，後に分析する最小二乗学習過程を含む一般的な定式化である。

いま，t 期において観察される $k\times 1$ 状態変数ベクトルを z_t とする。また，経済主体が経済の動学

13) 定常サンスポット均衡と定常サンスポット均衡への学習過程による収束問題については，Azariadis (1981, 1993), Woodford (1990) を参照のこと。

構造を決定すると予測している $l\times 1$ パラメータベクトルを α_t とし，t 期におけるこの推定値を $\hat{\alpha}_t$ で表す。α_t を知覚された運動法則と呼ぶ。この推定値を経済の構造方程式に代入すると，t 期における状態変数 z_t の実際の値が得られる。これを実際の運動法則と呼ぶ。よって，知覚された運動法則から実際の運動法則への写像が存在し，この写像を

$$z_t = A(\hat{\alpha}_{t-1})z_{t-1} + B(\hat{\alpha}_{t-1})u_t, \tag{A-1}$$

と表す。但し，u_t は $m\times 1$ 撹乱項ベクトル，A, B はそれぞれ，$k\times k, k\times m$ 行列値関数である[14]。

Robbins and Monro (1951) の確率的近似法は，(A-1) 式のもとで，

$$EQ(z_t, \alpha) = 0, \tag{A-2}$$

を満たすパラメータ α を

$$\hat{\alpha}_t = \hat{\alpha}_{t-1} + \gamma_t Q(z_t, \hat{\alpha}_{t-1}), \tag{A-3}$$

に基づいて逐次的に推定するものである。但し，$Q(z_t, \alpha)$ は $\mathscr{R}^k \times \mathscr{R}^l \to \mathscr{R}^l$ を満たすベクトル値関数，γ_t は $\gamma_t > 0, \lim_{t\to\infty} t\gamma_t = 1$ を満たす非増加スカラー列である。以下では簡単化のため $\gamma_t = t^{-1}$ と仮定する[15]。

ここで，Ljung (1977) は (A-3) 式を

$$\frac{d}{d\tau}\alpha_\tau = EQ(z, \alpha_\tau) \equiv f(\alpha_\tau), \tag{A-4}$$

で近似し，(A-4) 式の収束条件を求めた。但し，$EQ(z, \alpha)$ は α を固定し z_t の漸近的定常分布に関して評価した $Q(z_t, \alpha)$ の期待値である。また，$\tau(t) = \log(t)$ である[16]。

命題 A-1 (Ljung (1977))[17]:

$$\hat{\alpha}_t = \hat{\alpha}_{t-1} + \gamma_t Q(z_{t-1}, \hat{\alpha}_{t-1}), \tag{A-3}$$

$$\alpha_t = \bar{\alpha}_t \text{ if } \bar{\alpha}_t \in D_1, \tag{A-5a}$$

$$\alpha_t = \text{some value in } D_2 \text{ if } \bar{\alpha}_t \notin D_1, \tag{A-5b}$$

$$z_t = A(\hat{\alpha}_{t-1})z_{t-1} + B(\hat{\alpha}_{t-1})u_t \text{ if } \bar{\alpha}_t \in D_1, \tag{A-6a}$$

$$z_t = \text{some value in compact subset in } \mathscr{R}^k \text{ if } \bar{\alpha}_t \notin D_1, \tag{A-6b}$$

という学習過程を考える。但し，D_1, D_2 はそれぞれ，$D_2 \subset D_1 \subset \mathscr{R}^l$ を満たす有界開集合，および閉集合である。また，集合 $D_A \subset \mathscr{R}^l$ を A, B が定義され，A の固有値が絶対値で 1 以下となる $\alpha \in \mathscr{R}^l$ の

14) 合理的な経済主体は A の不動点を知っている経済主体である。

15) Robbins and Monro (1951) は，$\lim_{t\to\infty}\hat{\alpha}_t = \alpha^*$ となるための条件を求めている。但し，α^* は $EQ(z_t, \alpha^*) = 0$，または $\lim_{t\to\infty} EQ(z_t, \alpha^*) = 0$ を満たす。この条件については，Robbins and Monro (1951) を参照のこと。

16) 十分大きな t に対して，$\alpha_t \approx \alpha_{t-1}$ が成立すること，および z_t の変動は α_t の変動に対して十分大きいと考えられるため，(A-3) 式における $Q(z_t, \alpha_{t-1})$ は $EQ(z, \alpha)$ で近似できる。よって，(A-3) 式は $(d\alpha_t/dt) \approx (\alpha_t - \alpha_{t-1}/1) \approx (1/t)EQ(z, \alpha)$ となる。ここで，$\tau(t) = \log(t)$ で時間を変換するならば，(A-4) 式を得る。

17) Ljung (1977) の仮定 C1～C7 を Woodford (1990) に従い修整している。

集合とする。さらに，集合 D_B を D_A の連結開部分集合とする。このとき，コンパクト集合 $\bar{D}\subset D_B$ に初期値をもつ(A-4)式の解軌道は，すべての t に対して，閉集合 $\bar{D}_B\subset D_B$ を離れないものとし，さらに，以下の条件（A-1-1)～(A-1-5）が $\alpha\in D_B$ について満たされるならば，(A-4）式の解軌道は確率1で，$t\to\infty$ のとき $\alpha_t\to D_C$ となる。但し，D_C はアトラクション $D_D\supset\bar{D}$ をもつ不変集合 $D_C=\{\alpha: f(\alpha)=0\}$ である。

(A-1-1)　u_t は i.i.d. に従う確率変数で，すべての $p>1$ に対して $E|u_t|^p<\infty$ が存在する。

(A-1-2)　Q は α, z について C^1 級関数で，その導関数はすべての $\alpha\in D_B$ に対して，有界である[18]。

(A-1-3)　A, B は D_B において Lipschitz 連続である。

(A-1-4)　$f(\bar{\alpha})\equiv\lim_{t\to\infty}EQ(\bar{z}, \bar{\alpha})$ がすべての D_B において存在し，さらにすべての $\bar{\alpha}\in D_B$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{s=1}^{t}Q(\bar{z}_s, \bar{\alpha})=f(\bar{\alpha}),$$

が確率1で満たされる。但し，

$$\bar{z}_t=A(\bar{\alpha})\bar{z}_{t-1}+B(\bar{\alpha})u,\ \bar{z}_0(\bar{\alpha})=0.$$

(A-1-5)　$\tilde{D}=D_1\backslash D_2, D_2\subset D_A$ としたとき，(4)式の解軌道が，$\tilde{D}$ の境界 $\delta\tilde{D}$ で $\tilde{D}$ の内側を向いている[19]。□

(A-5) 式，および (A-6) 式は推定値 α_t が集合 D_1 から離れてしまうような，経済主体の事前の予測と整合的でない観測値を無視することを意味し，“projection facility” と呼ばれる。

証明：省略[20]。■

最小二乗学習過程

次に，最小二乗学習過程を分析し，この最小二乗学習過程は確率的近似法の一つとして解釈できることを示す。また，確率的近似法の収束条件である命題 A-1 を，最小二乗学習過程に応用し，最小二乗学習過程の収束条件を導出する。これは学習過程における大域的な安定条件である[21]。

いま，x_t を外生的な定常変数からなる $n\times1$ ベクトル，y_t を定常スカラー変数としたとき，経済主体は変数 y_t は，

18)　Ljung (1977) においては，z および α について Lipschitz 連続性を仮定している。

19)　Ljung (1977) の Theorem 4 においては，(1) $\sup_{\alpha\in\tilde{D}}U'(\alpha)f(\alpha)<0$，(2) $\alpha\notin D_1$ に対して $U(\alpha)\geq C_1$, $\alpha\in D_2$ に対して，$U(\alpha)\leq C_2\leq C_1$ を満たす2階微分可能な関数 $U(\alpha)\geq0$ が存在することを仮定している。(1) は Lyapnov 関数 $U(\cdot)$ が存在することを保証し，(2) は D_2 に初期値をもつ (4) 式の解軌道が D_1 を離れないことを保証している。

20)　Ljung (1977) を参照のこと。

21)　最小二乗学習過程については，Ljung and Söderström (1983), Fourgeaud *et al.* (1986) を参照のこと。

$$y_t = \beta_t x_{t-1} + v_t, \tag{A-7}$$

によって決定されると推測しているものと仮定する。但し，β_t は，$n \times 1$ パラメータベクトルであり，知覚された運動法則である。また，$v_t \sim$ i.i.d. $(0, \sigma^2)$ なる撹乱項であり，xx' は非特異行列という最小二乗法における古典的仮定が満たされるものと仮定する。

経済主体は β_t を最小二乗法を用いて逐次的に推定するものと仮定する。すなわち，経済主体は t 期において，

$$\min_{\beta} V(\beta) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{t}(y_s - \beta' x_{s-1})^2, \tag{A-8}$$

を解くことにより，

$$\hat{\beta}_t = \left[\sum_{s=1}^{t} x_{s-1} x_{s-1}'\right]^{-1} \sum_{s=1}^{t} x_{s-1} y_s, \tag{A-9}$$

と推定する。

ここで，$\bar{R}_t = \sum_{s=1}^{t} x_{s-1} x_{s-1}'$ と定義し，これと $\sum_{s=1}^{t-1} x_{s-1} y_s = \bar{R}_{t-1}\hat{\beta}_{t-1}$ を（A-7）式に代入すると，

$$\hat{\beta}_t = \bar{R}_t^{-1}\left[\sum_{s=1}^{t-1} x_{s-1} y_s + x_{t-1} y_t\right] = \bar{R}_t^{-1}[\bar{R}_{t-1}\hat{\beta}_{t-1} + x_{t-1} y_t], \tag{A-10}$$

となる。さらに，$\bar{R}_{t-1} = \bar{R}_t - x_{t-1} x_{t-1}'$ を（A-10）式に代入すると，

$$\hat{\beta}_t = \hat{\beta}_{t-1} + \bar{R}_t^{-1} x_{t-1}\left(y_t - x_{t-1}'\hat{\beta}_{t-1}\right), \tag{A-11}$$

を得る。ここで，$R_t \equiv (1/t)\bar{R}_t$ と定義し，これを（A-11）式に代入すると，

$$\hat{\beta}_t = \hat{\beta}_{t-1} + \frac{1}{t} R_t^{-1} x_{t-1}\left(y_t - \hat{\beta}_{t-1}' x_{t-1}\right), \tag{A-12}$$

また，$R_t = (1/t)(\bar{R}_{t-1} + x_{t-1} x_{t-1}') = \{(t-1)/t\} R_{t-1} + (1/t) x_{t-1} x_{t-1}'$ より，

$$R_t = R_{t-1} + \frac{1}{t}(x_{t-1} x_{t-1}' - R_{t-1}), \tag{A-13}$$

が得られる。

以上より，（A-12），（A-13）式によって最小二乗学習過程は定式化されることがわかる[22]。

さらに，（A-12），（A-13）式は，（A-3）式において，

$$Q(z_t, \alpha) = \begin{Bmatrix} R^{-1} x_{t-1}(y_t - \beta' x_{t-1}) \\ x_{t-1}' x_{t-1} - R \end{Bmatrix}, \tag{A-14}$$

とおいたものであるから，最小二乗学習過程は確率的近似法の一つとして解釈できることがわかる。

次に，確率的近似法の収束条件である命題 A-1 を最小二乗学習過程に応用し，最小二乗学習過程の収束条件を導出する。これは学習過程における大域的安定条件である。

22）（A-12），（A-13）式において初期条件が (β_0, R_0) であるならば，これは初期信念を $N(\beta_0, R_0)$ としたときの Bayes 学習過程（Bayesian learning）と一致する。Bayes 学習過程については，Bray and Savin (1986), Bray and Kreps (1987) を参照のこと。

いま，知覚された運動法則から実際の運動法則への写像を，

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, C(\beta_{t-1})' \\ D(\beta_{t-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E(\beta_{t-1}) \\ F(\beta_{t-1}) \end{bmatrix} v_t, \tag{A-15}$$

と定式化する。但し，C, D, E, F は，それぞれ $n\times 1, n\times(n+1), 1\times 1, n\times 1$ 行列値関数である。

Marcet and Sargent (1989a) に従い，最小二乗学習過程を，

$$\hat{\beta}_t = \hat{\beta}_{t-1} + \frac{1}{t} R_t^{-1} x_{t-1} \left[x_{t-1}'(C(\hat{\beta}_{t-1}) - \hat{\beta}_{t-1}) + E(\hat{\beta}_{t-1}) v_t \right], \tag{A-16}$$

$$\bar{R}_t = R_{t-1} + \frac{1}{t}\left(x_{t-1} x_{t-1}' - R_{t-1} \right), \tag{A-17}$$

$$(\hat{\beta}_t, R_t) = (\bar{\beta}_t, \bar{R}_t) \text{ if } (\bar{\beta}_t, \bar{R}_t) \in D_3, \tag{A-18a}$$

$$(\hat{\beta}_t, R_t) = \text{some value in } D_4 \text{ if } (\bar{\beta}_t, \bar{R}_t) \notin D_3, \tag{A-18b}$$

と定式化する。但し，D_3, D_4 は，それぞれ $D_4 \subset D_3 \subset \mathscr{R}^{n^3}$ を満たす有界開集合，および閉集合である。(A-18) 式より，$D_4 = D_3$ のとき，$\bar{\beta}_t = \hat{\beta}_t, \bar{R}_t = R_t$ となり，このとき，(A-16) 式は，(A-12) 式に (A-15) 式より得られる $y_t = C(\beta_{t-1})' x_{t-1} + E(\beta_{t-1}) v_t$ を代入したものであるため，先の最小二乗学習過程と一致する。(A-18) 式は，“projection facility” である。

ここで，集合 D_E を，C, D, E, F がそれぞれ定義でき，$\begin{bmatrix} 0, C(\beta) \\ D(\beta) \end{bmatrix}$ の固有値が絶対値で1以下となる β の集合とする。また，$\beta_t = \beta \in D_E$ のとき，x_t は共分散定常であるため，2次のモーメント $Ex_t x_t'$ が定義できる。この2次のモーメントは β に依存するため，これを $Ex_t x_t' = M_x(\beta)$ と表示する。

Marcet and Sargent (1989a) は，Ljung (1977) の命題 A-1 を応用し，以下の命題を得た。これは学習過程における大域的安定条件である。

命題 A-2 (Marcet and Sargent (1989))[23]: (A-16)，(A-17) 式において $\beta_t = \beta \in D_E, (\beta, R) \in D_E$, $R_t = R$ としたときに得られる

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \beta \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{-1} M_x(\beta)[C(\beta) - \beta] \\ M_x(\beta) - R \end{bmatrix}, \tag{A-19}$$

は，以下の条件 (A-2-1) ～(A-2-3) が満たされるとき，$t \to \infty$ のとき，$\beta_t \to \beta^*$ となる。但し，β^* は C の一意の不動点 $\beta^* = C(\beta^*), \beta^* \in D_E$ である。

(A-2-1)　v_t は i.i.d. に従う確率変数で，すべての $p > 1$ に対して $E|v_t|^p < \infty$ が存在する。

(A-2-2)　C は2階微分可能，D, E, F は D_E において1階微分可能である。

(A-2-3)　初期条件 $(\beta_0, R_0) \in D_4$ の (19) 式の解軌道が，D_3 の境界 δD_3 において D_3 の内側に向いている。□

証明：命題 A-1 の条件 (A-1-1)，(A-1-5) は条件 (A-2-1)，(A-2-3) と同一であり，条件 (A-1-

23)　Marcet and Sargent (1989) の Proposition1 を修整している。

2)，(A-1-3) は条件 (A-2-2) より導かれる。また，条件 (A-1-4) は，

$$\lim_{t\to\infty}E(R^{-1}[x_{t-1}\{x_{t-1}'(C(\beta)-\beta)+E(\hat{\beta})u_t\}]=R^{-1}M_x(\beta)[C(\beta)-\beta],$$

$$\lim_{t\to\infty}E(x_{t-1}x_{t-1}'-R)=M_x(\beta)-R,$$

が存在することより，満たされる。■

適合的学習過程と期待安定性 (expectational stability)

最後に，適合的学習過程における期待安定性という概念を分析し，もし合理的期待均衡が期待安定的であるならば，またそのときに限り，最小二乗学習過程は合理的期待均衡に収束することをみる。この収束条件は学習過程の局所的安定性の条件となる。

先と同様，知覚された運動法則を β，知覚された運動法則から実際の運動法則への写像を $C(\beta)$ で表す。このとき経済主体は，t 期において β_t を適合的学習過程

$$\hat{\beta}_{t+1}=\hat{\beta}_t+\delta(C(\hat{\beta}_t)-\hat{\beta}_t), \tag{A-20}$$

によって修正するものと仮定する。さらに，t 期から $t+1$ 期への変化が十分小さいと仮定し，(A-20) 式を

$$\frac{d}{dt}\hat{\beta}_t=C(\hat{\beta}_t)-\hat{\beta}_t, \tag{A-21}$$

で近似する[24]。

(A-21) 式は (A-19) 式において，大域的安定条件 $R\to M_x(\beta)$ を課したものである[25]。

DeCanino (1979), Evans (1985, 1989) は，(A-21) 式において，β^* を写像 C の不動点としたとき，β^* が局所安定的であるならば，すなわちすべての $\|\beta_0-\beta^*\|<\varepsilon$ に対して $t\to\infty$ のとき，$\beta_t\to\beta^*$ となるような $\varepsilon>0$ が存在するならば，β^* は期待安定的 (expectational stable, E-stable) であると定義した。これは $N\to\infty$ のとき，β^* に十分近い β_0 に対し，C の反復 $C^N(\beta_0)\to\beta^*$ となるとき期待安定的であると呼ばれることを意味している。

適合的学習過程 (A-21) 式が期待安定的であるための条件は，β^* で評価した C の Jacobian のすべての固有根の実部が 1 以下であることである。これは学習過程の局所的安定条件である。

参考文献

Azariadis, C. (1993) *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell.

Blanchard, O.J. (1979) "Speculative Bubbles, Crashes and Rational Expectations", *Economic Letters*, Vol. 3, No. 4, pp. 387-389.

——— and M.W. Watson (1982) "Bubbles, Rational Expectations, and Financial Market", in Wachtel, P.

24) (A-21) 式は Bray (1982) の学習過程モデルも含む定式化である。Sargent (1994) を参照のこと。

25) Marcet and Sargent (1988), Honkapohja (1993) を参照のこと。

(ed.), *Crises in the Economic and Financial Structure*, Lexington.

Bray, M.M. (1982) "Learning, Estimation, and Stability of Rational Expectations", *Journal of Economic Theory*, Vol. 26, No. 2, pp. 318-339.

——— and D. Kreps (1987) "Rational Learning and Rational Expectations", in Feiwei, G.R. (ed.), *Arrow and the Ascent of Modern Economic Theory*, New York University Press.

——— and N.E. Savin (1986) "Rational Expectations Equilibria, Learning, and Model Specification", *Econometrica*, Vol. 54, No. 5, pp. 1129-1160.

Brock, W.A. (1974) "Money and Growth: The Case of Long Run Perfect Foresight", *International Economic Review*, Vol. 15, No. 3, pp. 750-777.

——— (1975) "A Simple Perfect Foresight Monetary Model", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 1, No. 2, pp. 133-150.

DeCanino, S.J. (1979) "Rational Expectations and Learning from Experience," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 93, No. 1, pp. 47-57.

Evans, G.W. (1985) "Expectational Stability and the Multiple Equilibria in Linear Rational Expectations", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 100, No. 4, pp. 1217-1233.

——— (1986) "Selection Criteria for Models with Non-Uniqueness", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 18, No. 2, pp. 147-157.

——— (1989) "The Fragility of Sunspots and Bubbles", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 23, No. 2, pp. 297-317.

——— and S. Honkapohja (1994) "Learning Convergence, and Stability with Multiple Rational Expectations Equilibria", *European Economic Review*, Vol. 38, No. 5, pp. 1071-1098.

——— (2001) *Learning and Expectations in Macroeconomics*, Princeton University Press.

Fourgeaud, C., C. Gourieroux, and J. Pradel (1986) "Learning Procedures and Convergence to Rationality", *Econometrica*, Vol. 54, No. 4, pp. 845-868.

Frydman, R. and E. Phelps (1983) *Individual Forecasts and Aggregate Outcomes*, Cambridge University Press.

Honkapohja, S. (1993) "Adaptive Learning and Bounded Rationality: An Introduction to Basic Concept", *European Economic Review*, Vol. 37, No. 2/3, pp. 587-594.

——— (1995) "Bounded Rationality in Macroeconomics: A Review Essay", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 35, No. 3, pp. 509-518.

Ljung, L. (1977) "Analysis of Recursive Stochastic Algorithms", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, No. 4, pp. 551-575.

——— and T. Söderström (1983) *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press.

Mankiw, N.G., D. Romer, and M.D. Shapiro (1985) "An Unbiased Reexamination of Stock Market Volatility", *Journal of Finance*, Vol. 40, No. 3, pp. 677-687.

Marcet, A. and T.J. Sargent (1989a) "Convergence of Least Squares Learning Mechanisms in Self-Referential Linear Stochastic Models", *Journal of Economic Theory*, Vol. 48, No. 2, pp. 337-368.

——— (1989b) "Convergence of Least-Squares Learning in Environments with Hidden State Variables and Private Information", *Journal of Political Economy*, Vol. 97, No. 6, pp. 1306-1322.

——— (1989c) "Least-Squares Learning and the Dynamics of Hyperinflation", in Barnett, W., J. Geweke and K. Shell (eds.), *Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity, Proceedings of the Fourth International Symposium in Economic Theory and Econometrics*, Cambridge University Press.

Obstfeld, M. and K. Rogoff (1983) "Speculative Hyperinflation in Maximizing Models: Can We Rule Them Out?", *Journal of Political Economy*, Vol. 91, No. 4, pp. 675-687.

——— (1986) "Ruling Out Divergent Speculative Bubbles", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 17, No. 3, pp. 349-362.

——— (1996) *Foundations of International Macroeconomics*, MIT Press.

——— (1998) "Risk and Exchange Rates", *NBER Working Paper Series*, No. 6694.

Robbins, H. and S. Monro (1951) "A Stochastic Approximation Method", *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 22, No. 3, pp. 400-407.

Sargent, T.J. (1994) *Bounded Rationality in Macroeconomics*, Harvard University Press.

Simon, H.A. (1955) "A Behavioral Model of Rational Choice", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 69, No. 1, pp. 99-118.

Woodford, M. (1990) "Learning to Believe in Sunspots", *Econometrica*, Vol. 58, No. 2, pp. 277-307.